TIAGO MARQUES PESSÔA

MODELO PARA DETERMINAÇÃO DA CURVA DE VOLATILIDADE DE ATIVOS.

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Diploma de Engenheiro de Produção

SÃO PAULO

2003

TIAGO MARQUES PESSÔA

MODELO PARA DETERMINAÇÃO DA CURVA DE VOLATILIDADE DE ATIVOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Diploma de Engenheiro de Produção

Orientador:
Professora Doutora
Linda Lee Ho

SÃO PAULO

2003

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Aos Meus grandes amigos André Campos, Arthur Melo, Christian Iveson, Danilo Bonfatti, Guilherme Calderon, João Pedro Senna e Thiago Cozzi pelo suporte nos momentos difíceis.

Aos meus pais e meu irmão por tudo que sou.

A minha namorada pela paciência e ajuda durante todo o desenvolvimento do trabalho.

A Jayme Fernandez e Leonardo Cardoso pelas oportunidades, pela confiança e pela amizade desses 3 anos.

A todos meus familiares, e todas as pessoas que estiveram ao meu lado durantes esses anos.

A professora Linda pela paciência, orientação e incentivo ao trabalho.

A todos aqueles que participaram do meu desenvolvimento e não foram aqui citados.

RESUMO

O objetivo do trabalho é a determinação da curva de volatilidade de ativos que não possuem opções negociadas, para isso foi apresentado os conceitos necessários sobre o mercado de opções e o seu principal parâmetro, a volatilidade. Após a análise sobre alguns modelos pesquisados foi desenvolvido os Modelos Canônico de Máxima Entropia, sendo testado comparando a curva de volatilidade obtida com a curva de volatilidade observada do índice Bovespa, obtendo resultado bastante satisfatório.

ABSTRACT

The purpose of this paper is the determination of the volatility curve that do not have liquid options trading. Therefore were introduced some necessary concepts about the options market and it´s most important parameter, the volatility. After analising some models during the research, it was developped the Entropy Model, that was tested by comparing the obtained volatility curve with the volatility observed in Bovspa Index, reaching a fair relation between there two

CONTEÚDO

Com o intuito de orientar a leitura deste trabalho, o conteúdo dos capítulos que compõe é apresentado abaixo:

Capítulo 1 - Introdução

Este capítulo apresenta, inicialmente, uma introdução histórica ao mercado de derivativos, e uma breve descrição do mercado brasileiro e seus participantes. É discutida ainda, a necessidade do Banco JP Morgan de possuir um modelo que encontre a curva de volatilidade de ativos sem liquidez, e uma breve explicação sobre este objetivo. A metodologia e as atividades são também tratadas neste trecho.

Capítulo 2 – Opções

A explanação das características de uma opção , bem como os fatores que influenciam seus preços, constituem a introdução do capítulo, que aborda ainda a precificação das opções, sendo apresentado o modelo de Black&Sholes e a análise dos seus pressupostos. Por fim são feitas críticas ao modelo, quanto ao pressuposto da lognormalidade, que gera o gráfico de volatilidade constante, não condizendo com a realidade.

Capítulo 3 – A volatilidade

A volatilidade por se tratar de um ponto crucial deste trabalho, merece atenção especial neste capítulo, que apresenta e explica os tipos existentes, método de estimação e os tipos de curvas de volatilidades. É mostrado também como os negociadores conseguem combinado o ativo objeto e as opções, comprar e vender volatilidade.

Capítulo 4 – A Escolha de um modelo para encontrar a curva de volatilidade

Após apresentado o problema do modelo de Black&Sholes no capítulo 2, e explicar quais são os tipos de volatilidades, como ela é negociada e seus tipos de curva, conceitos básicos para entender o problema, neste capítulo será mostrado alguns modelos paramétricos e não paramétricos para a obtenção da curva de volatilidade, usando o critério de decisão utilizado por Oliveira,2000 , para decidir sobre o modelo a ser construído.

Capítulo 5 - Argumentação Teórica, Explicação, e Construção do Modelo de Máxima Entropia

Neste capítulo é mostrado o conceito da teoria da informação, no qual o modelo é baseado, o desenvolvimento matemático e apresentação de suas equações são também apresentados para por fim mostrar a sua construção em planilha eletrônica.

Capítulo 6 – Apresentação dos Resultados.

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos pelo modelo construído no capítulo 5, comparando a curva de volatilidade do índice Bovespa determinada pelo modelo e a observada no mercado.

Capítulo 7 – Conclusão

Por fim é apresentada a conclusão, analisando a viabilidade de utilização do modelo para determinar curvas de volatilidade de ações que não possuem opções sendo negociadas. É também apresentado sugestões para análises futuras e validação do trabalho na empresa.

1. Introdução

1.1 O Mercado de Derivativos

As primeiras opções de ações foram negociadas na bolsa em 1973 e desde então cresceram significativamente sendo atualmente negociadas em todo o mundo. Os ativos objetos dos contratos de opções incluem ações, índices de ações, moedas, instrumentos de dívida, commodities e contratos futuros. Este trabalho terá enfoque nas opções de ações, negociadas no mercado brasileiro.

Existem vários tipos de negociadores de opções, dentre eles merecem destaque: os *Hedgers*, os especuladores, os arbitradores e os negociadores de volatilidade.

Os mercados futuros foram criados originalmente para atender às necessidades dos *Hedgers*. Os produtores tinham o interesse em garantir um preço de venda para a sua produção e os comerciantes o interesse em estabelecer um preço de compra para obter tais produtos. Os contratos futuros, então, permitiam que ambas as partes atingissem o seu objetivo. O *Hedger* é basicamente o negociador de opções ou futuros que se utiliza deste instrumento para proteger seu investimento ou suas posições. No mercado de renda variável brasileiro os principais *Hedgers* são os Fundos de Pensão, que possuem suas posições em ação, e alguns *Assets Managements* (administradores de recursos de terceiros), os quais possuem metas indexadas ao Índice Bovespa[1].

Os Especuladores, diferentemente dos *Hedgers,* têm interesse em manter-se expostos às movimentações do preço do ativo objeto, assim sendo, apostam na alta ou na queda dos preços. No mercado de opção de renda variável brasileiro os principais especuladores são as pessoas físicas, que se utilizam dessas opções para obter ganhos rápidos e limitar suas perdas.

Os Arbitradores formam o terceiro grupo significativo de participantes dos mercados futuros e de opções. A arbitragem consite na obtenção de lucro sem risco, realizando transações simultâneas em dois ou mais mercados. No Brasil, as principais arbitragens ocorrem entre ações negociadas na Bovespa e as mesmas ações negociadas em forma de ADR (*American Depositary Receipt*) na NYSE (*New York Stock Exchange*). Os ADRs são recibos das ações negociadas na Bovespa, ou seja, o mesmo ativo, porém negociados em dólar.

Por último, existem os negociadores de volatilidade. Esses utilizam-se da combinação da compra e venda de opções com a compra e venda do ativo objeto resultando na negociação da volatilidade do ativo. A volatilidade é o principal parâmetro de uma opção, ela é a medida da incerteza dos retornos do ativo, sendo definida como o desvio padrão dos retornos da ação. Atualmente no mercado brasileiro as principais opções nas quais negocia-se a volatilidade são as opções de Tele Norte Leste s.a. (Telemar) e as opções sobre o Índice Bovespa.

O desvio padrão de uma distribuição lognormal de preços é definida como a sua volatilidade. No capítulo 3 será demonstrado como, a partir da combinação da compra da opção e da venda do ativo objeto (no caso da opção de compra), consegue-se negociar a volatilidade. Um negociador de volatilidade identificando que a opção de um determinado ativo para 30 dias está sendo negociada, por exemplo, com uma volatilidade de 20% e espera que este ativo seja mais volátil neste período, poderá comprar volatilidade, usando as opções e o ativo objeto. Este negociador terá lucro na operação caso o ativo seja realmente mais volátil durante o período da existência da opção.

---

[1] [1] Índice de ações que representa as 57 ações mais líquidas do mercado brasileiro

No decorrer deste trabalho será demonstrado que, para cada preço de exercício de uma opção, existe uma volatilidade diferente sendo negociada. Este fenômeno é responsável pela formação de uma curva assimétrica de volatilidade dos ativos. Curva esta facilmente observada no Brasil nas opções de Índice Bovespa e Telemar, que são opções de maior liquidez (facilidade de comprar e vender o ativo) e também nos Estados Unidos ,nas opções de índices como o S&P 500[2] e o Nasdaq[3].

1.2 Necessidades do Banco JP Morgan Brasil

Como a grande maioria das instituições financeiras, o Banco JP Morgan possui um departamento responsável pela administração do seu capital no mercado financeiro. Este departamento é dividido em duas áreas: a área de renda fixa, responsável pela administração dos recursos em taxas de juros e moedas; e a área de renda variável, responsável pela administração dos recursos em ação, índices de ação e seus derivativos.

O departamento de renda variável denominado *Equity Derivatives Group* (EDG) além de tomar as decisões relativas ao capital administrado pelo banco, também é responsável por estabelecer preços de operações solicitadas pelos clientes.

O enfoque principal da área de EDG são operações de volatilidade utilizando opções. Está área é também denominada de "*market maker*" das opções de renda variável por ter a responsabilidade de precificar opções solicitadas por clientes ou por outras instituições financeiras.

[2] Índice que representa as ações das 500 empresas de maior valor de mercado nos Estados Unidos.
[3] Índice que representa as ações das 100 maiores e mais líquidas empresas de tecnologia no mundo

No entanto, no mercado brasileiro encontramos o problema da existência de poucos ativos com opções líquidas sendo negociados, o que torna difícil a precificação de determinadas opções requisitadas por clientes.

Este problema é agravado principalmente para as opções com preço de exercício mais baixo ou mais alto que o preço atual do ativo, já que a sua curva de volatilidade não é conhecida. Foi verificado que nesses casos, é utilizada a curva de volatilidade do Índice Bovespa, ou de outra ação similar, adequando-a ao risco que os negociadores estão dispostos ter. Entretanto, sem a utilização de qualquer modelo que chegue a conclusão de qual seria a curva de volatilidade do ativo baseado em seus preços históricos.

Em entrevista aberta com os negociadores foi-se então constatado que a criação de um modelo computacionalmente viável e de fácil utilização, além de aumentar a rapidez na obtenção dos resultados, seria bastante útil para atender às necessidades da área de EDG.

1.3 Objetivo do trabalho: A curva de volatilidade

Diferentemente das mesas de opções de moedas, ou de juros, as mesas de opções de renda variável possuem diversos ativos com volatilidade distintas sendo negociados. Muitos desses ativos, como dito anteriormente, não possuem opções com liquidez , gerando dificuldade para serem precificados.

Além de diversos ativos, os negociadores de volatilidade encontram vários preços de exercícios e diferentes vencimentos, e devem ser capazes de avaliar se a volatilidade de um certo preço de exercício está mais alta ou mais baixa com relação a à sua volatilidade histórica. Por exemplo, um ativo objeto com preço de $100,00 que possui a volatilidade do seu preço de exercício de $100,00 negociada a 30% e uma opção de venda com preço de exercício de $80,00 negociada à 32% de volatilidade. Pergunta-se: A volatilidade do preço de exercício $80 é alta ou baixa? Se o preço do ativo cair 20% e passar a ser negociada à $80,00 a volatilidade deste ativo será 32%?

A proposta deste trabalho é apresentar uma curva assimétrica, baseada nos dados históricos dos ativos, capaz de descrever o comportamento da volatilidade ajudando a determinar qual a volatilidade para cada preço de exercício.

Várias são as explicações atribuídas pela literatura para a existência da assimetria na curva de volatilidade de um ativo. No caso de uma ação, por exemplo, pode-se dizer que a ocorrência de uma volatilidade maior quando o preço da ação diminui é dado pelo aumento do grau de alavancagem da empresa, que tem seu risco aumentado.

Uma outra razão para a existência da assimetria da curva é explicada pelo temor dos negociadores de volatilidade em haver o "*crash*" de uma empresa ou do mercado, semelhante ao vivido em 1987 pela bolsa de Nova Iorque. Em 19 de outubro de 1987 a Bolsa de Valores de Nova Iorque "quebrou", registrando uma queda brutal de 12,5% que zerou quase todos os ativos dos acionistas. Naquele dia, o Índice Industrial *Dow Jones*[4] caiu 508 pontos, ou 22,6%, ou seja, uma queda duas vezes maior que a registrada em outubro de 1929. Esta queda resultou do pânico de milhões de investidores em todo o mundo, que depois desta crise passaram a valorizar mais as as opções com preço de exercício mais baixo em detrimento das opções com preço de exercício mais alto.

Este efeito pode ser verificado com base nas figuras 1 e 2. Na figura1 observa-se como era negociada a volatilidade do índice S&P 500, antes da crise de 1987. Praticamente todos os preços de exercício eram

[4] índice que representa as 30 maiores empresas dos Estados Unidos da América

negociados com a mesma volatilidade. Na figura 2 observa-se como passou a ser negociada a volatilidade após a crise.

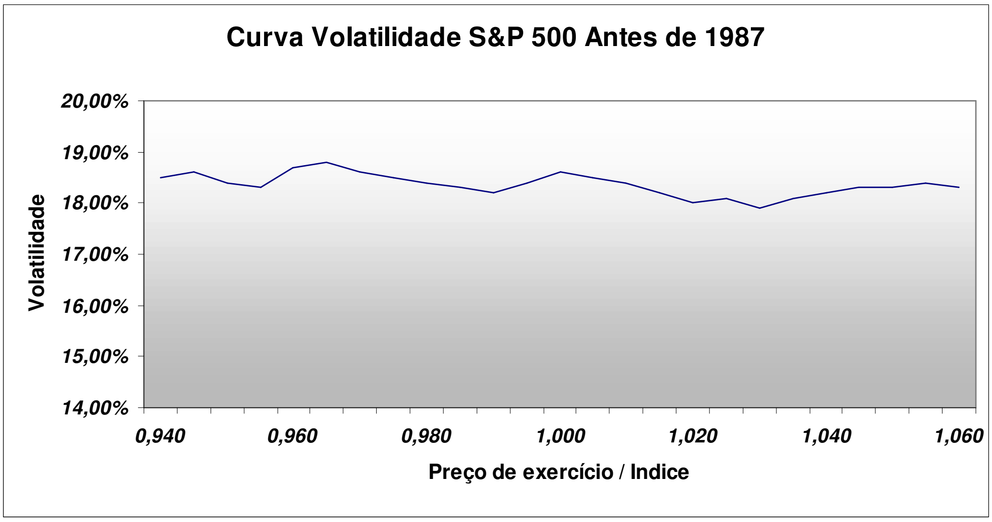


Figura 1 – Gráfico da volatilidade do S&P 500 antes de 1987- fonte Zou J.Z., 2000 – elaborado pelo autor.

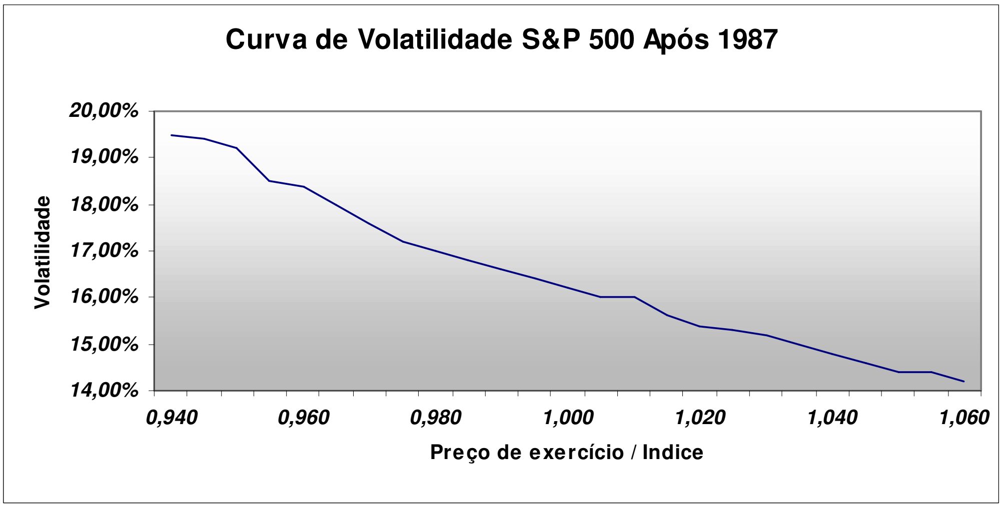


Figura 2 – Gráfico da volatilidade do S&P 500 após 1987 – Zou J.Z., 2000 – elaborado pelo autor.

Pode-se observar uma nítida mudança na curva de volatilidade, onde os negociadores após a crise crise passaram a cobrar uma volatilidade mais alta pelas opções com preço de exercício mais baixo, devido a um aumento da volatilidade do índice S&P 500 durante a crise causada pelas quedas bruscas do mercado.

Baseado neste problema, neste trabalho será criado um modelo, baseado nos preços históricos, que encontrará a curva assimétrica de volatilidade do ativo e este será testado, comparando com a volatilidade negociada de ativos mais líquidos, no Brasil, no caso opções sobre o índice Bovespa.

1.4 Metodologia

O primeiro passo para o desenvolvimento do projeto é a identificação das necessidades, definição dos objetivos, e o escopo do trabalho.

Para se desenvolver um modelo viável capaz de encontrar a curva de volatilidade das opções, deve-se primeiro compreender o funcionamento do mercado de opções, suas limitações locais, bem como a precificação de opção utilizando os modelos usuais (no nosso caso o modelo de Black&Schoels) e os problemas neles existentes. Além disso, é necessário compreender como os negociadores operam a volatilidade combinando as opções, o ativo objeto e os riscos inerentes nessas operações. É necessário também entender como é calculada a volatilidade histórica, o que ela significa e quais são os demais tipos de volatilidade existentes.

Após esta etapa de fundamentação teórica, mister se faz a proposição de uma solução ao problema, que como supramencionado, consite na construção de modelo que encontre a curva assimétrica de volatilidade de uma ação baseada em seus preços históricos. Para isso deve-se pesquisar quais são as teorias já existentes (paramétricas e não paramétricas) e identificar qual melhor se adapta ao problema existente, explicando os conceitos utilizados, para mais tarde construí-lo em planilhas eletrônicas, de forma a modelar matematicamente o problema.

A construção das planilhas eletrônicas deve ser feita de forma a atender às necessidades dos negociadores, sendo de fácil utilização e dando ênfase às variáveis a serem inseridas de forma a diminuir a possibilidade de erro do usuário. Além disso, o modelo tem de ser capaz de trazer os resultados de forma rápida e eficaz possibilitando ao negociador utilizar esses dados para precificar a operação solicitada pelo cliente.

Com o domínio dos conceitos e a construção das planilhas, é possível a efetuação dos testes convenientes de modo a verificar a aplicação da metodologia. Bem como tirar conclusões sobre o modelo comparando a curva de volatilidade obtida de um ativo líquido, no nosso caso o índice Bovespa, com a curva presente no mercado.

Por fim, devemos encontrar um método eficientemente capaz de identificar erros existentes no modelo e mensurá-los convenientemente.

1.5 Atividades

Sabendo da metodologia que será utilizada para o desenvolvimento do trabalho, podemos, agora, elencar as atividades que deverão ser executadas para o sucesso do projeto.

- Pesquisas Bibliográficas, que devem abranger as vastas coleções de livros e trabalhos da Escola Politécnica, Faculdade de Economia e Administração da USP, Banco JP Morgan, publicações sobre o tema, bem como *sites* de Internet que disponibilizam informações relevantes e confiáveis;
- Compilação das informações obtidas na pesquisa bibliográfica;

- Estruturação do trabalho;
- Definição das metodologias a serem propostas no projeto, o que deve ser feito mediante associação dos conhecimentos adquiridos durante a pesquisa bibliográfica e durante o estágio supervisionado, com entrevistas com os operadores e demais participantes do mercado, que podem ser beneficiados com este trabalho;
- Definição de qual o melhor modelo teórico a se modelar;
- Construção das planilhas;
- Construção de algumas funções usualmente chamadas “macro”, que possam facilitar o usuário na utilização do modelo;
- Obtenção das séries de dados que serão as “entradas” das planilhas de teste do modelo, atentando-se sempre para a procedência dos dados e a sua conseqüente confiabilidade;
- Teste das séries de dados no modelo, verificando a velocidade de obtenção das respostas;
- Coleta de resultados;
- Coleta dos dados atuais de mercado;
- Construção de gráficos e tabelas, comparando os dados obtidos e os de mercado;
- Teste dos dados obtidos pelo modelo para avaliação;
- Desenvolvimento das conclusões acerca da metodologia e dos testes desenvolvidos;
- Entrevista com os negociadores para obter opiniões sobre o modelo e assim poder propor melhorias futuras, que possam corrigir pequenas falhas e aumentar a eficiência da metodologia proposta, elevando sua confiabilidade e precisão.

2. Opções

O principal objetivo deste Capítulo é descrever as características operacionais e finalidade do uso das **opções**.

Inicialmente será apresentado o conceito de opções, o seu retorno e quais são as variáveis que impactam sua precificação. A seguir, será apresentado o modelo de Black&Scholes e seus principais pressupostos, onde será discutido o princípio da lognormalidade da distribuição e as contestações a este princípio.

2.1 Introdução

Há dois tipos básicos de opções. A *opção de compra* proporciona a seu detentor, o direito de comprar o ativo objeto em certa data, por determinado preço. Uma *opção de venda* proporciona ao seu titular, o direito de vender o ativo objeto, em certa data por um determinado preço. O preço acordado do contrato é conhecido como *preço de exercício* e a sua data como *data de vencimento*. As *opções americanas* podem ser exercidas a qualquer tempo até o seu vencimento. As *opções européias* podem ser exercidas somente na sua data de vencimento.

Deve-se enfatizar que uma opção dá ao seu titular o direito de fazer algo, mas sem obrigá-lo a fazê-lo. Esta é uma das características que distinguem uma opção de um contrato futuro ou de um contrato a termo, pois nestes casos o detentor é obrigado a comprar ou vender o ativo objeto.

Uma outra característica que distingue as opções do contrato futuro e a termo é que neste não existe um custo para a realização do contrato, enquanto que para as opções há o pagamento de um *prêmio*, preço pelo qual o comprador da opção pagará para ter o direito de comprar, ou vender a ação em determinada data por um determinado *preço de exercício*.

No Brasil existem dois tipos de opções de ações: as opções de ações listadas e as opções de ações flexíveis. As opções de ações listadas são negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) e possuem prazo de vencimento mensal, definido como a segunda-feira mais próxima do dia 15 do mês. As opções sobre o Índice Bovespa possuem prazo de vencimento bimestral (meses pares) definido como a quarta-feira mais próxima do dia 15. Os preços de exercícios são também definidos pela Bovespa. As opções flexíveis são negociadas na Bolsa de Mercadoria e Futuros (BM&F) e são também chamadas de opções de balcão, elas podem ter qualquer preço de exercício e vencer em qualquer data definida pelas duas partes envolvidas.

As opções listadas mais líquidas são as opções de compra de Telemar, ação que representa atualmente 15% do peso do Índice Bovespa, sendo que os vencimentos mais líquidos são os dois meses mais próximos e os quatro preços de exercícios mais próximos do preço da ação. As opções de compra de Telemar são consideradas as opções mais líquidas da América Latina. A segunda opção mais líquida são as opções de compra da empresa Petróleo Brasileiro s.a. (Petrobrás). No Brasil, opções de venda de ações tem sua liquidez muito baixa, quase não sendo negociadas.

Na Figura 3, a seguir, pode-se observar o retorno do detentor de uma opção.

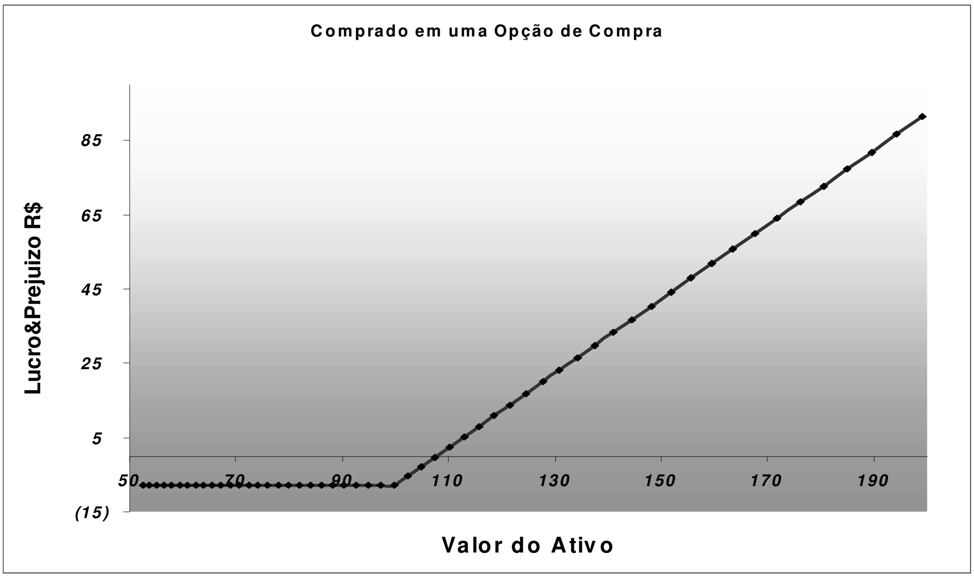


Figura 3 – Gráfico do retorno de uma opção de compra – elaborado pelo autor

No exemplo acima observa-se a compra de uma opção de compra de ação com prêmio de $10,00. O preço da ação no momento é de $105,00, e o seu preço de exercício é de $100,00. Neste caso o detentor da opção tem o direito, mas não o dever de comprar a ação por $100. A figura 3 traduz o comportamento do lucro do detentor da opção. O comprador perde os $10,00 investidos se o preço da ação estiver abaixo dos $100, e começa a ganhar quando a ação estiver acima do preço de exercício, somado com o prêmio pago pela opção. No caso, o detentor da opção começa a obter lucro quando a ação estiver com o preço acima de $110,00.

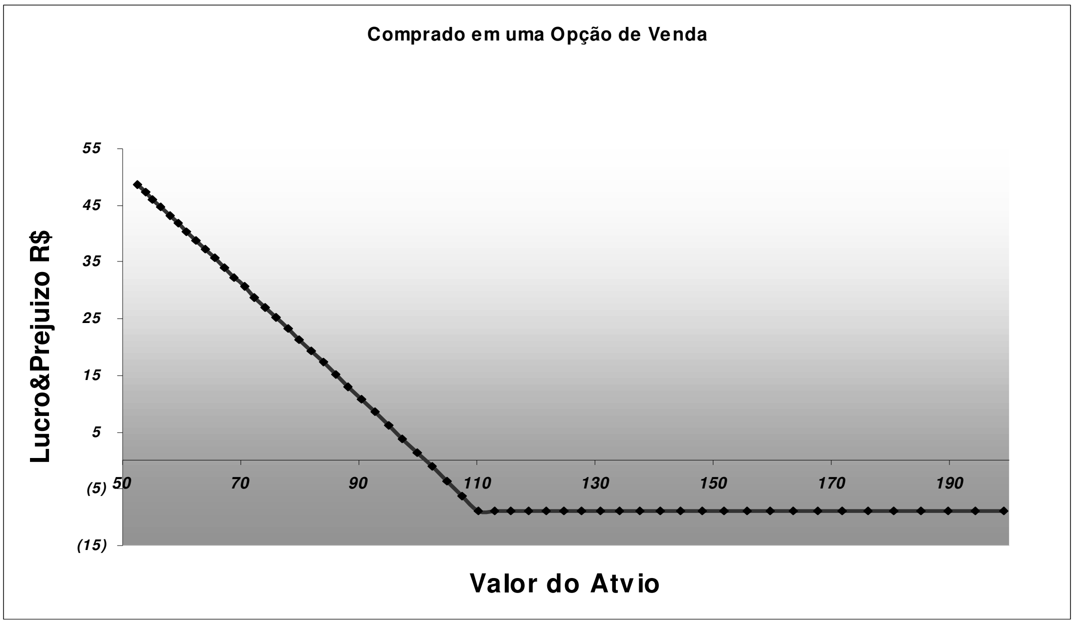


Figura 4- Gráfico do retorno de uma posição comprada em uma opção de venda-elaborado pelo autor.

Neste outro exemplo acima o investidor está comprado em uma opção de venda com preço de exercício de $110,00. O ativo vale no atual momento $105,00 e o prêmio pago pela opção de venda é de $10,00. Pode-se verificar que o detentor da opção de venda tem sua perda limitada ao prêmio pago iniciando seu ganho quando a ação estiver abaixo de $100,00.

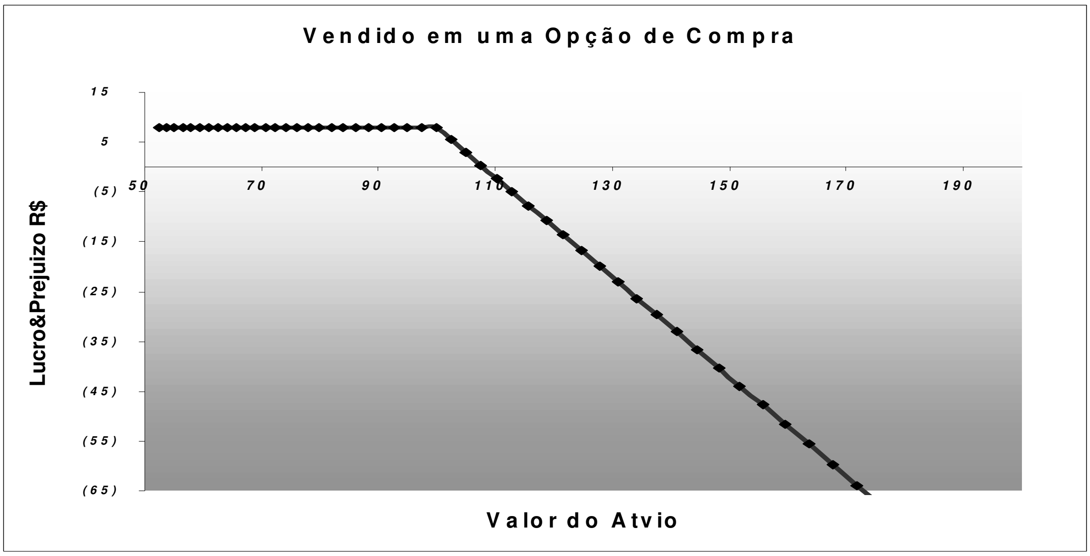


Figura 5- gráfico de uma posição vendida em uma opção de compra - elaborado pelo autor.

Na figura 5 tem-se o exemplo de um investidor que vendeu uma opção de compra, o preço de exercício é de \$100,00 e o prêmio recebido pela venda da opção de \$10,00. Caso ativo esteja abaixo do preço de exercício no seu vencimento, o vendedor da opção ganhará o prêmio, caso contrário ele começará a perder quando o preço alcançar \$110,00, que é o preço de exercício mais o prêmio pago. Diferentemente da opção comprada, o vendedor tem sua perda ilimitada.

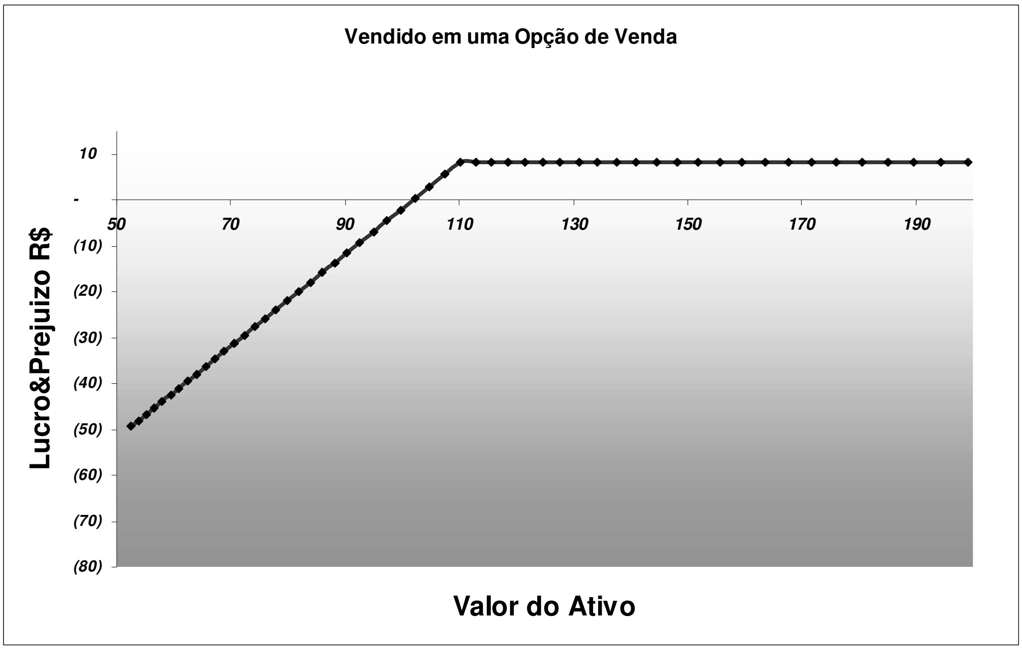


Figura 6- Gráfico de uma posição vendida em uma opção de venda- elaborado pelo autor.

Por fim a figura 6, traz o retorno do investidor que vendeu em uma opção de venda de preço de exercício \$110,00. O investidor só obterá lucro se o preço do ativo estiver acima do preço de exercício menos o prêmio recebido pela venda da opção, no caso \$10,00.

Outro conceito importante a ser introduzido é a nomenclatura utilizada nas opções dependendo do seu preço de exercício. A opção considerada "*At the Money*" (ATM) é a opção cujo preço de exercício é igual ao preço do ativo objeto. A opção denominada "*in the money*" (ITM) é aquela cujo o preço está abaixo do seu preço de exercício, no caso da opção de compra e, acima do seu preço de exercício no caso da opção de venda. A opção "*out of the money*" (OTM) tem seu preço de exercício acima do preço do ativo objeto no caso da opção de compra e abaixo do ativo objeto no caso da opção de venda.

O negociador de volatilidade não tem somente a direção do mercado como variável, mas também a velocidade na qual ele se move. Por exemplo, um negociador de futuros compra contratos futuros e um negociador de opções compra contratos de opções de compra, ambos com a expectativa de que o mercado suba. Caso este fato se concretize o detentor do contrato futuro com certeza obterá lucro enquanto o detentor da opção poderá ter prejuízo, dependendo da velocidade na qual o mercado sobe e de outras variáveis existentes que compõe o preço das opções, a seguir apresentadas.

O conceito de velocidade é vital para negociar opções. Muitas estratégias dependem diretamente da velocidade na qual o mercado se moverá e não na direção que ele irá tomar.

2.1 Fatores que afetam o preço das opções

Para calcular o preço teórico de uma opção deve-se levar em consideração as seis características de uma opção e de seu ativo objeto:

- preço corrente da ação;
- preço de exercício;
- tempo para o vencimento;
- volatilidade do preço da ação;
- a taxa de juros livre de risco;
- os dividendos esperados durante a vida da opção.

2.2.1 Preço da ação e o preço de exercício.

O preço de exercício é o preço pelo qual o portador de uma opção de venda (ou de compra), terá o direito de vender (ou comprar) o ativo objeto. Se exercida em algum momento no futuro, uma opção de compra terá como valor o quanto o preço do ativo exceder o preço de exercício da opção, é o chamado **valor intrínseco** da opção. Uma opção de venda terá como valor intrínseco, exatamente o contrário, o quanto o preço de exercício exceder ao preço do ativo no mercado. Desta forma, uma opção de compra se tornará mais valiosa quanto maior o preço do ativo, e menor o preço de exercício. Analogamente, uma opção de venda se tornará menos valiosa quanto maior o preço do ativo a que ela se refere, e menor o preço de exercício.

2.2.2 O tempo até o vencimento.

As Opções Americanas, indiferentes de ser uma opção de compra ou venda, sempre aumentam de valor quando o tempo até o vencimento aumenta. Isso ocorre porque o portador de uma opção longa tem maiores oportunidades de exercício do que o possuidor de uma opção mais curta.

2.2.3 Volatilidade.

A volatilidade do ativo pode ser definida como a medida de quão incerto está o mercado a respeito do movimento futuro dos preços deste ativo. Com o aumento da volatilidade, a probabilidade do ativo apresentar um resultado muito bom ou muito ruim aumenta, ou seja, o risco da ação aumenta. Para os detentores de opção, no entanto, sejam elas de compra ou de venda, aumenta a possibilidade de um resultado excepcional e, por terem perdas limitadas (o prêmio pago pela opção), o aumento da volatilidade aumenta o preço da opção. Assim, tanto o valor das opções de compra quanto o valor das opções de venda aumentam com o aumento da volatilidade.

2.2.4 A taxa de juros.

A taxa de juros afeta o preço das opções de uma maneira menos intuitiva que os demais citados anteriormente. Quando a taxa de juros sobe, a taxa de crescimento esperada dos preços dos ativos também tende a aumentar, no entanto, o valor presente de qualquer fluxo de caixa recebido pelo detentor do ativo diminui. Estes dois efeitos diminuem o valor de uma opção de venda, ou seja, o aumento da taxa de juros reduz o preço de opções de venda. No caso das opções de compra, o efeito do aumento da taxa esperada de crescimento tende a aumentar o preço da mesma, enquanto o valor presente do fluxo de caixa tende a desvalorizar a opção. O primeiro efeito sempre domina o segundo no caso das opções de compra e dessa forma seu preço sempre aumenta com a elevação dos juros

2.2.5 Dividendos

A distribuição de dividendos causa uma diminuição no preço do ativo ex-dividendo, diminuindo o preço da opção de compra e aumentando o preço da opção de venda.

A tabela 1 mostra um resumo dos efeitos sobre o prêmio de uma opção em função do fatores que afetam seus preços.

Tabela1 – Efeito no preço de uma opção no aumento de uma variável e mantendo as outras constantes—Fonte Hull J,1993, elaborado pelo autor.

Resumo dos efeitos sobre o prêmio de uma opção				
Variável	**Opção de compra européia**	**Opção de venda européia**	**Opção de compra americana**	**Opção de venda Americana**
Preço da ação	**+**	**-**	**+**	**-**
Preço de exercício	**-**	**+**	**-**	**+**
Tempo até vencimento	**+**	**+**	**+**	**+**
Volatilidade	**+**	**+**	**+**	**+**
Taxa de juros	**+**	**-**	**+**	**-**
Dividendos	**-**	**+**	**-**	**+**

2.3 Conceito de expectativa de retorno

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1,\ldots,x_n$ Seja $p(x_i) = P(X= x_i)$, i=1,2,...n. Então o valor esperado de X, ou esperança matemática de X, denotado por E(X) é definido como:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\, p(x_i)$$

Este número é também denominado de valor médio de X, ou *expectância* de X. Se um dado equilibrado for jogado e a variável aleatória X designar o número de pontos obtidos, então E(X) = (1/6) (1+2+3++4+5+6) = 3,5. Nitidamente E(X) não é o valor esperado se o dado for jogado uma única vez, nem mesmo é um valor possível, mas se o dado jogado aleatoriamente diversas vezes a média dos pontos obtidos é 3,5.

2.4 A precificação das opções

Como utilizar o conceito de expectativa de retorno para o cálculo das opções? O que é preciso para calcular a expectativa de retorno de uma opção?

Supondo um ativo negociado a $100,00 e este podendo somente assumir cinco diferentes valores no futuro: $80, $90, $100, $110 ou $120. É assumido ainda que cada um dos cinco preços tem a mesma probabilidade de 20% de ocorrência. Baseado no conceito de expectativa de retorno, qual é o valor esperado de um investidor que possui uma posição comprada neste ativo?

Sabendo-se que se o preço do ativo for de $80 perde-se $20, se for $90, perde-se $10, se for $100, não há ganho e assim sucessivamente e como todos os cinco preços tem a mesma probabilidade de ocorrência, a expectativa de retorno é:

$$- (20\%x\$20) – (20\% \times \$10) + (20\%x0) + (20\%x \$10) + (20\% \times \$20) = 0$$

Como os lucros e prejuízos são iguais, a expectativa de retorno para uma posição comprada ou vendida no ativo é zero.

Agora, suponha-se uma posição comprada em uma opção de compra com preço de exercício $100 e os cinco mesmos diferentes valores possíveis e probabilidades do exemplo anterior. A expectativa de retorno da opção de compra será:

(20% x 0) + (20% x 0) + (20% x 0) + (20% x 10) + (20% x 20) = $6

A opção de compra nunca poderá valer menos que 0, portanto a expectativa de retorno de uma opção de compra é sempre um número não negativo, sendo de $6 no caso acima explanado.

Os exemplos acima trazem apenas situação simplificada para facilitar o entendimento do conceito da expectativa de retorno na precificação das opções, entretanto, para a obteção de um preço mais próximo do real deve-se levar em consideração vários outros fatores.

Primeiramente deve-se saber o vencimento da opção e a taxa de juros livre de risco do mercado. No Brasil e em grande parte dos outros mercados, quando compra-se uma opção seja ela de compra ou de venda, o caixa referente ao valor de compra é pago no dia seguinte para o vendedor, e este capital deixa de ser remunerado pela taxa de juros livre de risco. Desta forma, deduze-se do valor esperado de uma opção de compra, no caso do exemplo acima de $6, o custo do seu capital. Supondo a taxa de juros livre de risco de 12%a.a (1%a.m) e que o vencimento da opção seja de 2 meses, neste caso o custo do capital utilizado na compra da opção é de 2% x $6 = $0,12, ou seja, o valor teórico da opção é de $5,88.

Como será demonstrado adiante, o modelo de precificação de Black&Sholes tem como princípio a suposição de que o preço da ação irá subir ao menos a taxa de juros livre de risco do período, portanto as probabilidades iguais de 20% para cada preço utilizadas no exemplo acima não terão valor para este modelo.

2.5 Precificação de opções.

A precificação de opções é uma tarefa bastante complexa, visto que grande parte das informações necessárias para a execução desta tarefa são probabilísticas e de difícil obtenção, principalmente no Brasil onde o mercado de opções não é sufucientemente desenvolvido. Além disso, existem várias peculiaridades que dificultam a precificação das opções, dentre elas pode-se citar a falta de liquidez dos ativos, taxas de juros bastante elevadas e voláteis, volatilidade histórica distorcida por vários planos econômicos, inflação e mudanças cambiais entre outras.

É fundamental para o cotidiano do mercado financeiro atual uma precificação rápida, pois as instituições financeiras, como dito anteriormente, utilizam este instrumento ou para proteção de suas posições (hedge), ou para ganhos especulativos seja negociando a volatilidade, seja negociando as opções puramente para obter ganhos alavancados. Desta maneira a precificação deste produto financeiro é conditio sine quanon para que tais operações sejam bem sucedidas.

Vários modelos foram desenvolvidos com o intuito de estimar o “preço justo” para o derivativo. Para tanto, associa-se uma série de informações referentes ao ativo objeto, tendo como ponto comum a volatilidade dos retornos, que será abordado mais adiante por ser um dos pontos chave de um modelo de precificação, bem como de todo o mercado de opções.

2.6 Modelo de Black&Scholes

O modelo mais utilizado atualmente pelas mesas de derivativos, é o modelo de Black&Scholes pela sua praticidade e rapidez nas respostas. Neste item será apresentado o seu desenvolvimento mostrando suas equações e discutido uma das suas principais falhas ao assumir a distribuição de probabilidades dos retornos do ativo uma normal. Este pressuposto do modelo assume que a volatilidade do ativo é a mesma para qualquer preço de exercício, sendo o gráfico de volatilidade das opções para diferentes preços de exercício uma constante.

Em 1973 com a abertura da *Chicago Board Options Exchange*, Fischer Black e Myron Sholes introduziram o primeiro modelo para a precificação de opções. O modelo de Black&Scholes, é hoje a ferramenta mais utilizada pelos negociadores no mercado de opções americano. Embora muitos outros modelos com princípios diferentes, tenham sido desenvolvidos depois, o Black&Scholes é hoje ainda o mais utilizado. Trata-se de um modelo baseado em uma equação diferencial, a qual relaciona os fatores que influenciam o seu preço, ou seja, seus riscos, de forma a determinar a variação desses fatores frente as variações das demais.

Neste item o modelo será exposto, dando maior ênfase na explicação dos seus pressupostos, principalmente no da lognormalidade da distribuição de probabilidades do ativo objeto, pressuposto o qual o modelo a ser desenvolvido contestará.

2.6.1 Princípios do modelo de Black&Scholes.

Para se derivar a fórmula de precificação de opções, o modelo parte das seguintes hipóteses:

- O comportamento do preço de uma ação corresponde a um modelo lognormal, com média μ (retorno esperado ao ano de uma ação, o seja, a taxa de juros livre de risco), e σ (estimativa do desvio padrão – volatilidade) constante;
- Custos operacionais e impostos são inexistentes. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;

- O Ativo não gerará dividendos durante a vida da opção;
- Não há probabilidade de arbitragem sem risco;
- A negociação com títulos é contínua;
- Os investidores podem tomar emprestado ou emprestar à mesma taxa de juros livre de risco;
- A taxa de juros livre de risco de curto prazo é constante;

2.6.2 Princípio da distribuição lognormal

A equação de Black&Scholes nada mais é do que uma equação de valor esperado. Para se encontrar o valor esperado de um determinado fluxo de caixa, é necessário conhecer seus retornos e a sua distribuição de probabilidades. Para encontrar a equação de Black&Scholes, deve-se encontrar, portanto, quais os retornos e as suas probabilidades nas opções.

A suposição que fundamenta o modelo de Black&Sholes, é que os preços seguem um movimento aleatório, sendo assim as mudanças proporcionais no preço da ação, ou seja, o seu retorno, segue uma distribuição normal. Isto implica que o preço da ação, em qualquer momento no futuro tem uma distribuição lognormal, como será mostrado no decorrer do capítulo.

Os modelos de comportamento dos preços das ações são expressos em termos do que é conhecido por processos de Wiener. O comportamento de uma variável, z, que acompanha o processo de Wiener, pode ser compreendida pela mudança do seu valor em pequenos intervalos de tempo. Considerando um pequeno intervalo de tempo, de extensão Δt, e definindo Δz como a mudança de z durante Δt. Há duas propriedades básicas que Δz deve satisfazer para que z seja um processo de Wiener:

- Propriedade 1: Δz relaciona-se a Δt pela equação:

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (2.1)$$

ε é a variável aleatória normal padronizada (isto é, uma distribuição normal com média zero e desvio padrão 1);

- Propriedade 2 : Os valores de Δz, para quaisquer dois pequenos intervalos de tempo Δt distintos, são independentes.

A partir da propriedade 1, Δz possui uma distribuição normal com:

Média Δz = 0
Desvio Padrão Δz = √Δt
Variância Δz = Δt

O processo de Wiener anterior, possui uma taxa de desvio zero e taxa de variância de 1,0. A taxa de desvio significa que o valor esperado de z, a qualquer tempo futuro, é igual a seu valor atual. Entende-se por taxa de variância 1,0 como sendo a variância da mudança em z, num intervalo de tempo de extensão T. A forma contínua do processo generalizado de Wiener para uma variável x pode ser definido como:

$$dx = adt + bdz \qquad (2.2)$$

Onde a e b são constantes.

Os dois parâmetros que descrevem o comportamento do preço de uma ação quando se é suposta a distribuição lognormal, são:

- Retorno esperado da ação
- A volatilidade do preço da ação

O retorno esperado da ação é a taxa de juros livre de risco do mercado, pois o capital utilizado para a compra da ação deixa de ser remunerado. O investidor somente abrirá mão da remuneração livre de risco para comprar uma ação caso a expectativa do retorno desta ação seja ao menos a taxa de juros livre de risco.

A suposição de que a taxa de desvio esperada seja constante não é apropriada e deve ser substituída pelo pressuposto de que o desvio esperado, expresso como uma proporção do preço da ação, seja constante. Isto significa que, sendo $\mathbf{S_0}$ o preço atual da ação, a taxa de desvio esperada de S é μS_0, para um parâmetro constante μ. Assim num pequeno intervalo de tempo, Δt, o aumento esperado de S é $\mu S_0 \Delta t$.

Supondo a taxa de variância do preço da ação zero, esse modelo implica que:

$$dS = \mu S dt \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt \qquad (2.3)$$

De modo que:

$$S = S_o e^{\mu T} \qquad (2.4)$$

S_0 é o preço da ação no instante zero, μ a taxa de juros livre de risco e T o tempo. Observa-se pela equação 2.4 que quando a taxa de variância é zero, o preço da ação aumenta a uma taxa de μ, capitalizada continuamente, por unidade de tempo.

A volatilidade é uma medida de incerteza quanto às oscilações futuras no preço da ação que será denotado por $\boldsymbol{\sigma}$. Isto significa que $\sigma^2 \Delta t$ é a variância da mudança proporcional no preço da ação, S, no instante Δt e que $\sigma^2 S_0^2 \Delta t$ é a variância do preço efetivo da ação, S, durante Δt. A taxa instantânea de S é, portanto, $\sigma^2 S_0^{\ 2}$.

Pelo processo de itô, S pode ser representado com taxa de desvio esperada instantânea de μS_0 e taxa de variância instantânea de $\sigma^2 S_o^2$. Podendo ser escrito como:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \qquad (2.5)$$

A versão do modelo em tempo discreto é:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (2.6)$$

O lado esquerdo da equação 2.6 é o retorno proporcional fornecido pela ação num período curto de tempo, Δt. O termo $\mu\Delta t$ é o valor esperado desse retorno e o termo $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ é o componente estocástico do retorno. A variância do componente estocástico é portanto $\sigma^2\Delta t$.

Pelo modelo de Black&Sholes $\Delta S/S$, é distribuído normalmente, com média $\mu\Delta t$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Em outras palavras:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right) \qquad (2.7)$$

Como mostrado na equação 2.5 o comportamento da ação é dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Considerando uma função, f= f(S, t), a partir do lema de itô, tem-se:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \qquad (2.8)$$

Se :

$$f = \ln S$$

Então :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} = -\frac{1}{S^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Que resulta em:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \tag{2.9}$$

Como μ e σ são constantes, a equação 2.9 indica que lnS segue o processo generalizado de Wiener, que possui taxa de desvio constante de $\mu - \sigma^2/2$ e taxa de variância constante de σ^2, isto significa que entre o tempo atual, t, e algum tempo futuro, T, lns é normalmente distribuída:

$$G \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t); \sigma^2 (T-t) \right] \tag{2.10}$$

Uma variável com distribuição lognormal tem a propriedade de seu logaritmo natural ser normalmente distribuído. A suposição lognormal para os preços da ação implica, portanto, que ln S_t seja normal, onde $\mathbf{S_t}$ é o preço da ação num instante futuro, **T**. A média e o desvio padrão de ln S_t podem ser mostrados como:

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \tag{2.11}$$

Sendo S_0 é o preço atual da ação, μ é o seu retorno esperado, ou seja, a taxa de juros livre de risco no mercado e σ é a volatilidade ao ano do preço da ação. Escreve-se o resultado como sendo:

$$\ln S_t \sim N\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \qquad (2.12)$$

O valor esperado ou médio de S_t, $E(S_t)$, como anteriormente exposto, é o valor atual da ação multiplicado pela taxa de juros livre de risco r.

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu T} \qquad (2.13)$$

Isso se encaixa na definição de μ como a taxa de retorno esperada. A variância de S_t, $\mathrm{var}(S_t)$, pode ser demonstrada por:

$$\mathrm{var}(S_t) = S_0^{\;2} e^{2\mu T}\left[e^{\sigma^2 T} - 1\right] \qquad (2.14)$$

Exemplificando a equação acima, pode-se verificar, pelo princípio da lognormalidade, que para uma ação com preço $100, taxa de juros livre de risco 22.5%a.a. e 30% de volatilidade, a distribuição de probabilidade do preço da ação, S_t, no período de seis meses é fornecida por:

$$\ln S_t \sim N\left[\ln 100 + \left(0{,}225 - \frac{0{,}09}{2}\right)0{,}5; 0{,}3\sqrt{0{,}5}\right]$$

Ou

$$\ln S_t \sim N(4.695; 0.212)$$

podendo ser escrito da seguinte forma:

$$e^{4.483} < S_t < e^{4.907}$$

Ou com 95% de probabilidade de o preço da ação em seis meses ser entre 88,05 e 135,27 e a média da distribuição é dado por:

$$\mu(S_t) = 100e^{0,5x22,5\%} = 111,90$$

2.6.3 Equações de precificação de Black&Scholes

Após mostrado como é a distribuição dos preços das ações pelo principal pressuposto do modelo, nesta seção serão apresentadas as equações para os preços de opções européias de compra e venda,

Como exposto no item anterior, a equação 2.5, descreve o movimento do preço das ações como:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Supondo que f é o preço de uma opção de compra. A variável f deve ser função de S e t, f(S,t). Tal que:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \qquad (2.15)$$

A função discreta das equações 2.5 e 2.15 é dado por:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \qquad (2.16)$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \qquad (2.17)$$

As equações 2.16 e 2.17 são a versão discreta dos modelos de comportamento das ações e dos seus derivativos, no caso deste trabalho, uma opção. A partir da combinação da ação e do derivativo pode-se criar um portfólio sem risco. A razão pela qual este portfólio pode ser criado vem do fato do preço do ativo e da opção serem ambos afetados pela mesma fonte de incerteza: o movimento das ações. Num intervalo curto de tempo o preço de uma opção de compra é perfeitamente e positivamente correlacionado com o preço da ação, tornando possível a criação de um portfólio de ações, com um fluxo de caixa idêntico ao das opções, de forma a neutralizar o risco.

Por se tratar de um modelo de tempo contínuo, a correlação entre a opção e a ação é pontual, ou seja, ocorre em um intervalo de tempo infinitesimal, portanto este portfólio criado, para não existir risco, deve ser ajustado dinamicamente. Em outras palavras, os Δz ($=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$), das equações (2.16) e (2.17) são iguais. Assim, ao escolher uma carteira de ação e do derivativo, o processo de Wiener pode ser eliminado.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)\sigma S - \sigma S = 0 \qquad (2.18)$$

O portfólio replicante a ser criado é:

$$Derivativo = -1 \qquad (2.19)$$

$$Ação = \frac{\partial f}{\partial S} \qquad (2.20)$$

O investidor que detém este portfólio, possui uma posição vendida em um derivativo e uma posição comprada em $\partial f/\partial S$ ações. Definindo Π como o valor do portfólio tem-se que:

$$\Pi = -f + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S \qquad (2.21)$$

Logo, uma mudança $\Delta\Pi$ no valor do portfólio em um intervalo de tempo Δt é dado por:

$$\Pi = -\Delta f + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)\Delta S \qquad (2.22)$$

Substituindo as equações da ação 2.16 e do derivativo 2.17 na equação 2.22 tem-se:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 S^2}\right)\sigma^2 S^2\right)\Delta t \qquad (2.23)$$

Como essa equação não envolve nenhuma incerteza (não existe Δz), o portfólio não tem risco durante o intervalo de tempo Δt. Portanto o retorno desse portfólio nesse intervalo de tempo, deve ser igual ao retorno da taxa livre de risco, caso contrário são criadas oportunidades de arbitragens, portanto:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \qquad (2.24)$$

onde r é a taxa livre de risco, substituindo 2.21 e 2.23 em 2.24 tem-se:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)s\right)\Delta t \qquad (2.25)$$

simplificando:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)rS + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\sigma^2 S^2 = rf \qquad (2.26)$$

a equação 2.26 acima é a equação diferencial parcial de Black&Scholes. Ela tem muitas soluções dependendo do derivativo o qual se queira precificar. As condições de contorno utilizadas na resolução dessa equação irão dizer qual derivativo que se está sendo precificando. No caso de uma opção européia de compra a condição de contorno é:

$$f = Max(S - K;0) \tag{2.27}$$

Quando t=T

Black and Sholes resolveram essa equação diferencial parcial para essa condição de contorno e chegando por fim a equação do preço da opção de compra:

$$C = S\phi(d1) - Xe^{-r(T-t)}\phi(d2) \tag{2.28}$$

Onde :

$$d1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.29}$$

$$d2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{2.30}$$

X é o preço de exercício, **r** a taxa de juros, **t** o tempo até o vencimento e **S** o valor da ação. $\phi(y)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável distribuída normalmente, com média zero e desvio padrão 1.

A expressão $\phi(d_2)$ é a probabilidade de a opção ser exercida num mundo neutro ao risco, de modo que $X\phi(d_2)$ seja o preço de exercício multiplicado pela probabilidade de o preço de exercício ser pago. A expressão $S\phi(d_1)e^{r(T-t)}$ é o valor esperado da variável que é igual a S_t, se $S_t >$ X, e zero caso contrário.

O preço da opção de compra também pode ser escrito com sendo:

$$C = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} (S_t - X) q(S_t) dS_t \tag{2.32}$$

Sendo f função de densidade de probabilidade de S_t ,

O valor de uma opção européia de venda pode ser calculada de forma semelhante à de uma opção européia de compra. Sua equação é:

$$P = Xe^{-r(T-t)}\phi(-d2) - S\phi(-d1) \tag{2.33}$$

2.7 Críticas ao Modelo

O modelo de Black&Scholes existe há quase 30 anos e é natural que, tanto em seus dias iniciais quanto agora, haja certas críticas a serem feitas.

Talvez a premissa mais criticada do Black&Scholes seja a da lognormalidade de S, já que cada ativo possui uma distribuição dos retornos própria, se aproximando ou não a uma lognormal.

A premissa da lognormalidade pode ser contestada por dois argumentos :

1. A curva de distribuição de probabilidade de um prazo qualquer geralmente afasta-se de uma distribuição lognormal.
2. A volatilidade para períodos mais longos ou movimentos maiores difere-se da volatilidade de períodos curtos de movimentos contidos, ou seja, que a volatilidade, e a própria distribuição da ação, sejam dependentes da escala em que se observa o movimento do mercado

A primeira linha de contestação é a resposta imediata ao não ajustamento do modelo de Black&Scholes a qualquer condição do mercado não prevista. Se em um momento qualquer as opções mais “in the money” possuem um valor mais alto do que preconiza o modelo, ou as opções mais “out of the money” estão com um valor mais baixo, ou qualquer que seja este desvio, é considerado um erro o modelo assumir a distribuição de probabilidade como sendo lognormal.

Como mostrado em suas premissas, a volatilidade do ativo é constante independente do seu preço de exercício e, como explicado no capítulo1, consegue-se observar a existência de uma assimetria na curva de volatilidade (conhecido no mercado como “*smile effect*”). Este desvio é observado em opções negociadas no mercado internacional ou mesmo locais como as de Telemar e do Índice Bovespa, que possuem maior liquidez e um maior número de preços de exercícios negociados.

Na figura 7 é mostrado como é a distribuição preconizada pelo modelo de Black&Scholes e a distribuição real do ativo.

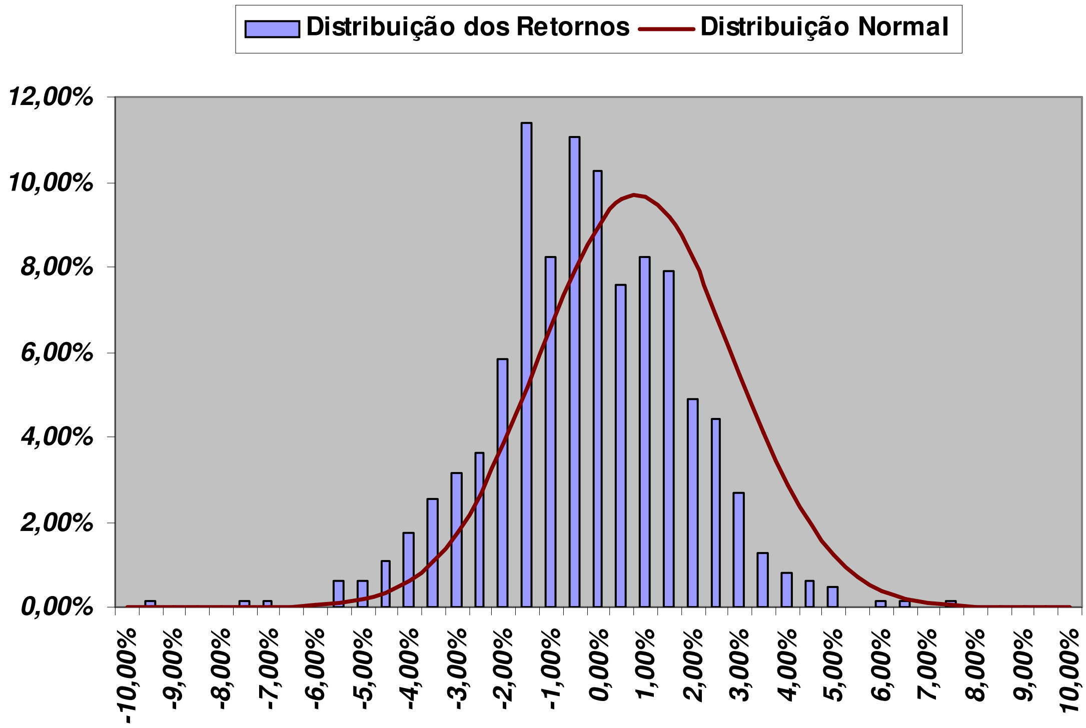


Figura7 – Distribuição dos retornos do ativo x distribuição normal- ativo índice Bovespa, 17/11/2000 à 13/06/2003 fonte Bloomberg – elaborado pelo autor

Algumas importantes informações podem ser retiradas da comparação dos gráficos apresentados na figura 7. Primeiramente, as médias das distribuições são diferentes, a distribuição dos retornos do ativo pode ter qualquer média, assumindo até valores negativos, no caso acima, a média dos retornos é –0,23%. A média da distribuição normal de Black&Sholes é, como já exaustivamente mencionado, a taxa de juros.

Outra constatação é a existência de observações fora do intervalo (-8%,+8%), o que para uma distribuição normal seria extremamente improvável. A existência dessas observações extremas ajuda a explicar porque o Black&Scholes deprecia opções “out of the money”. Na verdade, movimentos extremos são mais prováveis do que pode-se predizer com base em uma distribuição normal.

Na prática, a volatilidade se mostra dependente do preço do exercício e da maturidade da opção em questão. Cada preço de exercício possui uma volatilidade diferente, formando uma curva de volatilidade, como mostrado na figura 2 no início do trabalho, se calculado o preço das opções utilizando o modelo de Black&Sholes, as volatilidades de todos os preços de exercício seriam a mesma, o que, como já mencionado, não condiz com a realidade.

No modelo que será desenvolvido neste trabalho, será utilizada a distribuição real do ativo objeto, recentralizando-a, de forma que o valor esperado da distribuição seja o mesmo da distribuição normal de Black&Sholes, sem alterar o formato da distribuição original, como será exposto no capítulo 5.

3. A Volatilidade

A volatilidade é um dos parâmetros mais importantes dentro do mercado de opções. O negociador de volatilidade não está interessado só na direção do mercado (tendência de alta ou de baixa), mas também na velocidade das mudanças. Isso porque se o preço do ativo não se mover suficientemente rápido, opções sobre esse ativo perderão seu valor, já que torna-se mais difícil o mercado atingir seus respectivos preços de exercício.

Dessa forma, a volatilidade é, além de uma medida de incerteza, também uma medida de velocidade de mudanças do mercado. Mercados que se movem lentamente são mercados com baixa volatilidade, enquanto mercados que se movem velozmente são mercado de alta volatilidade.

Neste capítulo será mostrado como a volatilidade é calculada, quais os tipos de volatilidade existentes e como ela se relaciona com o preço do ativo. Será apresentado também, como negociadores de volatilidade, conseguem negociá-la combinado operações com opções e o ativo objeto para, por fim, apresentar os tipos de curva de volatilidade mais encontrados no mercado.

3.1 O que é a Volatilidade

A volatilidade de uma ação, como supramencionado, é o desvio padrão do retorno dessa ação, ou seja a incerteza quanto aos seus retornos.

Em geral as volatilidades são expressas em percentuais e anualisada. Pode-se dizer que a volatilidade do índice Bovespa é 30% ao ano, por exemplo.

Porém este período de tempo pode ser mais longo que o próprio período de existência da opção, principalmente no Brasil onde os vencimentos com liquidez das opções são bastante curtos. Para encontrar o valor da volatilidade diária, semanal ou mensal deve-se utilizar uma importante característica da volatilidade, a de que esta é proporcional à raiz quadrada do tempo, de forma simplificada, $\sigma\sqrt{T}$ sendo o desvio padrão da mudança proporcional no preço da ação no instante T. Considerando a volatilidade de 30% ao ano do índice Bovespa pode-se dizer que para esta volatilidade espera-se uma movimentação diária do índice em torno de $30/\sqrt{(1/252)}$ = 1,89% por dia.

Existem vários tipos de volatilidades presentes na literatura:

- Histórica
- Atual
- Futura
- Prevista ou projetada
- Realizada
- Implícita

A especificação de todos esses tipos de volatilidade foge ao objetivo do trabalho, este será focado nos três tipos principais e mais utilizados de volatilidade no mercado, a volatilidade histórica, a realizada e a implícita.

3.2 Volatilidade Histórica

Como em outros mercados e disciplinas, um bom referencial para a precificação de algum ativo é a observação do seu comportamento histórico. O negociador utiliza para negociar suas opções a análise do comportamento do ativo no passado e, baseado nela e nas suas previsões de qual será a volatilidade futura, precificar as suas opções.

Se nos 10 anos que se passaram, a volatilidade de uma ativo jamais ficou abaixo dos 10% e acima dos 30%, o negociador tende a utilizar este histórico para precificar suas opções. Obviamente que este diferencial é muito grande, mas o negociador não compraria a volatilidade do ativo por 50%, nem venderia esta por 5%, por exemplo.

Existem vários métodos para calcular a volatilidade histórica, mas todos os métodos dependem de dois parâmetros, o período histórico em que se verifica o comportamento do ativo e o intervalo de tempo entre os preços.

O período histórico pode ter dez dias, seis meses, cinco anos, ou qualquer período que o negociador desejar. Períodos longos tendem a ser uma média da volatilidade, não sendo influenciados por eventos específicos no mercado sendo assim menos voláteis. Os períodos mais curtos tendem a ser mais voláteis pois refletem a atual situação do mercado. Pode-se observar esta diferença analisando a figura 8 a seguir:

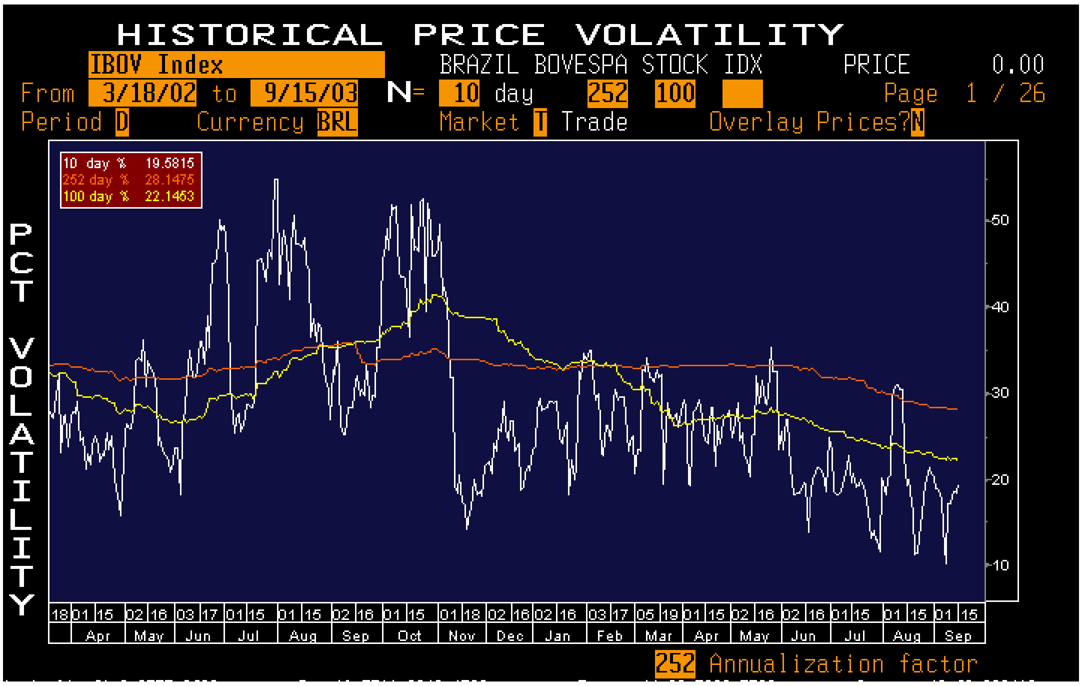


Figura 8– Gráfico da volatilidade histórica, de 10,100,252 dias, de 18/03/2002 à 15/09/2003 – fonte Bloomberg

A figura 8 mostra como se comportou a volatilidade histórica do índice Bovespa de 03 de maio de 2002 à 15 de setembro de 2003. Pode-se observar que a volatilidade de 252 dias, é muito pouco volátil, ela tem o máximo de 36% e o mínimo de 28%. Já a volatilidade de 10 dias se comporta de uma maneira diferente. Por ser um intervalo de tempo mais curto, ela é mais influenciada pelos eventos atuais no mercado, e varia entre 54% e 10% de volatilidade.

O negociador que se baseia na volatilidade histórica para negociar a sua opção, deverá avaliar a volatilidade compatível com o seu tempo de existência. No caso acima, uma opção com vencimento em 10 dias teria uma volatilidade maior do que uma que vencesse em um ano.

3.2.1 Cálculo da volatilidade histórica

Um registro das oscilações de preços das ações pode ser usado para estimar a volatilidade. O preço da ação mostrado anteriormente costuma ser observado em intervalos fixos de tempo. Existem vários métodos na literatura para o cálculo da volatilidade histórica. Pode-se citar entre eles o modelo de alisamento exponencial, o modelo de Garch (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), e o modelo de GKP (German –Klass- Parkinson), a especificação detalhada de cada um deles, no entanto, foge ao escopo do trabalho.

Para o cálculo da volatilidade histórica utiliza-se o desvio padrão dos retornos, atribuindo o mesmo peso para todos os dados. No mercado de renda variável, por existirem muitos ativos, fica inviável a atribuição de pesos ou coeficientes para o cálculo da volatilidade já que muitos desses ativos não são acompanhados diariamente pelos negociadores.

Define-se:

N + 1 = número de observações

S_I: preço da ação no final do I-ésimo intervalo (I = 0,1,…,n)

T: intervalo de tempo em anos

E:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \qquad (3.1)$$

Uma estimativa,s, do desvio padrão dos valores de u_I é dada pela seguinte equação:

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \overline{u}\right)^2} \qquad (3.2)$$

Em que $\overline{u}$ é a média $u_{i.}$ Ou :

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2} \qquad (3.3)$$

Como exemplo, na tabela2, será mostrado o cálculo da volatilidade histórica do Índice Bovespa, de 02 de maio de 2003 à 30 de maio de 2003.

Tabela 2 – Cálculo da volatilidade do índice Bovespa, de 02/05/2003 à 30/05/2003 – elaborado pelo autor.

Data	Ibovespa	Retorno Si / Si-1	Retorno Diário ui=ln(Si/Si-1)
30/4/2003	12556,7		
2/5/2003	12.810	1,0202	0,0200
5/5/2003	12.833	1,0018	0,0018
6/5/2003	12.644	0,9853	(0,0149)
7/5/2003	12.956	1,0247	0,0244
8/5/2003	12.921	0,9973	(0,0027)
9/5/2003	13.214	1,0227	0,0224
12/5/2003	13.320	1,0080	0,0080
13/5/2003	13.421	1,0075	0,0075
14/5/2003	13.459	1,0029	0,0029
15/5/2003	13.130	0,9755	(0,0248)
16/5/2003	13.225	1,0073	0,0072
19/5/2003	12.746	0,9638	(0,0369)
20/5/2003	12.745	0,9999	(0,0001)
21/5/2003	13.034	1,0226	0,0224
22/5/2003	13.101	1,0052	0,0051
23/5/2003	13.143	1,0032	0,0032
26/5/2003	12.852	0,9779	(0,0223)
27/5/2003	13.246	1,0306	0,0302
28/5/2003	13.294	1,0036	0,0036
30/5/2003	13.422	1,0096	0,0095

Com isso tem-se que:

$$\sum u_i = 0{,}06667 \qquad \sum u_i^{\,2} = 0{,}005939$$

Uma estimativa para o desvio padrão do retorno diário é:

$$\sqrt{\frac{0{,}005939}{19} - \frac{0{,}06667^2}{380}} = 0{,}0173$$

Assumindo que tem-se 252 dias de negociação ao ano, t = 1/252, pode-se dizer que a volatilidade ao ano do índice Bovespa para o período é de 0,0173/252 = 27,54% .

3.3 Volatilidade implícita

A volatilidade implícita é utilizada pelo mercado na precificação das opções, ou seja, é a volatilidade considerada “justa” pelos negociadores. Ela é a volatilidade que está imbutida no preço da opção negociada. Para identificar a volatilidade implícita de um determinado ativo, deve-se utilizar o modelo de Black&Scholes, fornecendo como parâmetro do modelo o preço da opção negociada no mercado e os outros parâmetros já citados no trabalho. Será obtido como saída, a volatilidade implícita da opção. Uma forma fácil de obter a volatilidade implícita utilizando o Black&Scholes é utilizando a função “Goal seek” do Excel.

Por existir muitos participantes e ofertas de compra e de venda de opções, a oferta de demanda chega à um equilíbrio. Este equilíbrio entre os preços pode ser considerado a volatilidade implícita.

Assim, para que se utilize em um estudo as volatilidades implícitas das opções abordadas para um determinado ativo, é necessário possuir séries negociadas de tais opções. Com isso é possível observar, para um certo vencimento, a sua curva assimétrica de volatilidade (conhecida no mercado por *smile*)

Observa-se o comportamento da volatilidade histórica do ativo em relação ao seu preço observando a figura 9:

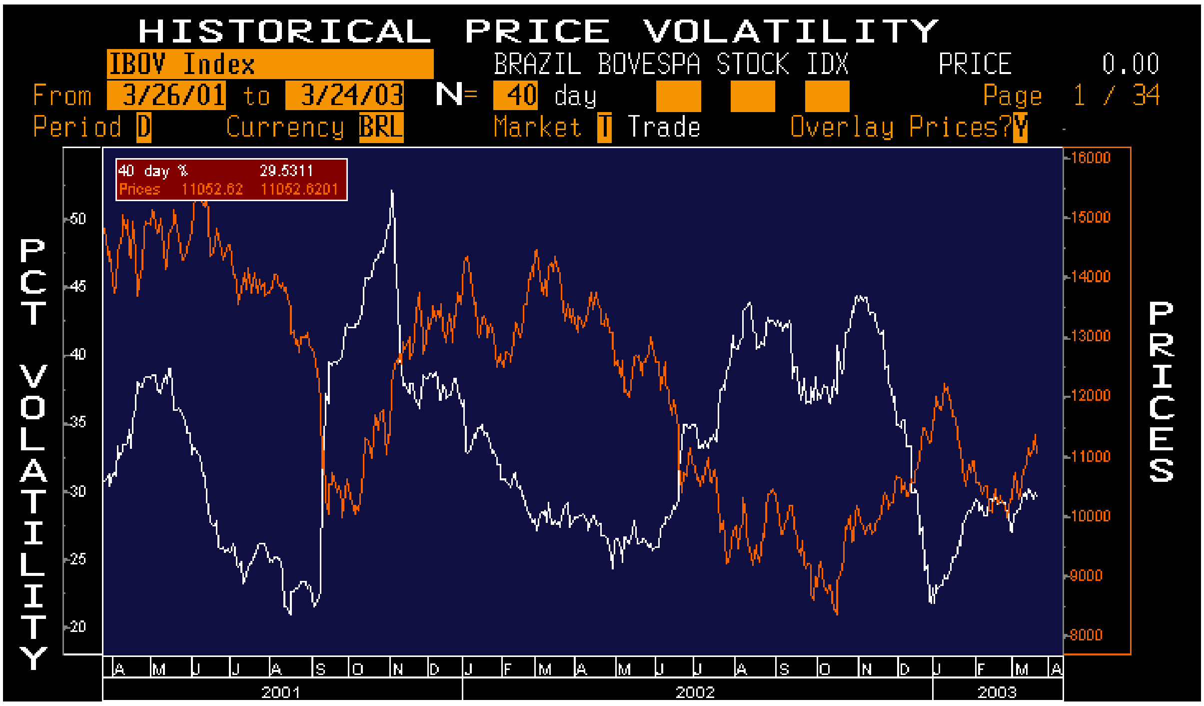


Figura 9 – Gráfico da volatiliade histórica e do preço do Ibovespa de 26 de maio de 2001 à 24 de maio de 203 – Fonte Bloomberg

Na Figura 9 acima observa-se que quanto maior o preço do ativo, menor a sua volatilidade realizada, isto ocorre pelas inúmeras razões já apresentadas neste trabalho no capítulo1. A análise da figura 9, pode-se constatar que a volatilidade realizada do ativo aumenta quando o seu preço diminui, explicando o porquê dos negociadores atribuírem volatilidade implícita mais alta para preços de exercícios mais baixos, formando assim uma curva de volatilidade implícita dependente do preço de exercício.

3.4 Volatilidade realizada

É conhecida por volatilidade realizada, a volatilidade que ocorre durante o período de existência da opção. O negociador que comprou a volatilidade implícita de TELEMAR para o vencimento em um mês à 32% e durante este período, entre a compra da opção (combinado com o ativo objeto que será mostrado adiante) até o vencimento, a volatilidade ocorrida da ação foi de 36%, então pode-se dizer que a volatilidade realizada do período de existência da opção foi de 36%.

3.5 Negociando a volatilidade

Neste item será apresentado com a volatilidade é negociada combinado a compra ou venda de opções, com a compra ou venda do ativo objeto.

Quando o negociador de volatilidade deseja comprar volatilidade, ele deve comprar a opção (de compra ou de venda) e fazer uma posição oposta no ativo objeto. Caso tenha comprado uma opção de compra ele deverá vender ações do ativo, caso ele tenha comprado uma opção de venda ele deve comprar ações do ativo. A opção de venda é, na verdade como se tivesse assumido uma posição vendida. Utilizando-se desses artifícios , o negociador estará, no instante inicial, neutralizando seu risco em relação a mudança do preço do ativo, o seja estará *delta* neutro.

O delta da opção é uma medida que informa qual o acréscimo ou decréscimo no preço de uma opção causado pelo acréscimo de $1,00 no preço do ativo objeto. O delta é a derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo, ou seja, é o $\partial f/\partial S$ da equação 2.20 do capítulo 2.

Portanto uma opção com delta 0,5, o negociador de volatilidade, para ter seu delta neutralizado deve, para cada 2 opções de compra compradas, vender 1 do ativo objeto. Caso o negociador não faça o delta hedge corretamente ele ficará exposto não só na volatilidade do ativo, mas também na direção do mercado.

O delta é um número sempre entre 0 e 1, podendo ser entendido como sendo a probabilidade da opção ser exercida em seu vencimento. O delta do ativo objeto é sempre 1. Pode-se ilustrar a posição do negociador com a tabela 3 abaixo:

Tabela 3- Posição final combinado a compra de opção com a venda da ação – elaborado pelo autor

Contrato	Delta	Posição
Compra de 100 Opções de compra para Junho	0,57	57
Venda de 57 ações	1	-57

Quando somado a posição na opção com a posição nas ações tem-se como resultado zero: *delta neutro* e portanto não havendo exposição ao movimento do ativo no instante inicial. Se a soma dos deltas da opção e da ação for positivo, o negociador obterá um lucro maior (ou perda menor) se o ativo subir e perderá mais (ou lucrará menos) se o ativo cair. Analogamente, se o delta for negativo ocorrerá ao contrário. Como o objetivo do negociador é a volatilidade e não a direção do mercado, ele deve ter sempre a sua posição com delta neutralizado.

3.5.1 Demonstração da compra da volatilidade

Supondo que o negociador sabe que a volatilidade futura realizada do ativo de uma certa ação que vale $100,00 nos próximos dez dias será de 40% e observa a volatilidade implícita da opção "at the money" sendo negociada no mercado à 30% de volatilidade. Supõe-se ainda que o negociador não conhece a direção do mercado somente a sua volatilidade futura. Ao precificar a opção, o negociador observa que a opção à 40% de volatilidade deve valer $ 2,67 e está sendo negociada à $2,02.

Os outros parâmetros que utilizados para precificação são :

- Taxa de juros livre de risco de 3%
- Dez dias para o vencimento
- Opção de compra
- O preço de exercício da opção que compraremos é de $100,00
- Valor do ativo no momento da compra da opção é $100,00

- A ação não pagará dividendos no período de existência da opção
- Será desprezado custos de transação e de aluguel da ação

O delta da opção no início da operação é 52%, a operação inicial para comprar a volatilidade de 30% do ativo é:

Tabela 4 – Operação inicial para compra da volatilidade do ativo – elaborado pelo autor

Ativo	Operação Inicial	Número de contratos	Delta	Posição Inicial
Opção de compra	Compra	100	52%	5200
Ação	Venda	52	100%	-5200

Fluxo de caixa da operação:

Tabela 5 – Fluxo de caixa e operações realizadas diariamente com a mudança do preço do ativo – elaborado pelo autor.

Dia	Preço da ação R$	Delta de 100 opções de compra	Total Delta da Posição	Operação		Total de ações ajustadas	Ganho & Perda na ação R$		Custo do Capital da ação	
0	100,00	52			-					
1	102,70	73	(2.306)	VENDER	(21)	(21)	R$	(139,43)	R$	0,61
2	99,20	44	3.078	COMPRAR	28	7	R$	254,57	R$	0,88
3	100,12	53	(867)	VENDER	(8)	(1)	R$	(40,73)	R$	0,52
4	103,81	84	(3.486)	VENDER	(32)	(33)	R$	(193,81)	R$	0,62
5	102,70	78	686	COMPRAR	6	(27)	R$	93,51	R$	1,03
6	98,77	36	4.539	COMPRAR	43	16	R$	308,38	R$	0,95
7	100,01	51	(1.585)	VENDER	(15)	1	R$	(44,19)	R$	0,41
8	100,50	60	(885)	VENDER	(9)	(8)	R$	(25,01)	R$	0,60
9	102,30	93	(3.504)	VENDER	(33)	(41)	R$	(107,28)	R$	0,70
10	103,20			COMPRAR	41				R$	1,11

Pode-se observar pela Tabela 5 que quando o preço da ação aumenta, o da opção também aumenta, pois a probabilidade da opção dar exercício é maior, e o negociador tem que vender ações no fim do dia para deixar sua posição delta neutro. O oposto ocorre quando o preço da ação diminui, fazendo com que o negociador compre o ativo objeto. Portanto, o negociador compra ação quando seu preço diminui e vende quando seu preço sobe. Do ponto de vista do negociador comprado em volatilidade, quanto maior o movimento da ação mais lucrativa será sua operação.

3.4.2 Lucro do negociador

***Hedge* original**: No vencimento da opção, após 10 dias o valor do ativo é de \$103,20, o negociador pode ou exercer a opção comprando o ativo por \$100 e vendendo por \$103,20, ou simplesmente vender a opção pelo valor intrínseco de \$3,20. Como a opção foi comprada por \$2,02 e vendida por \$3,20, o lucro na opção foi de (3,20 – 2,02)x100 = \$ 118,00, e a sua perda no ação pela venda original de 52 ações à \$100 foi de (100 – 103,20)x52 = - \$ 166,40.

Ajustes na posição: Pode-se observar na Tabela 5 que, quando o preço da ação aumenta o negociador vende ações para ajustar sua posição. No dia 1, a ação sobe de \$ 100,00 para \$102,70, o negociador obtém uma perda de (100 – 102,70)x52 = - \$139,43. Sendo assim deve-se vender mais 21 ações para ajustar sua posição. No dia seguinte o preço da ação diminui para \$ 99,20, e o negociador obtém agora um lucro de (102,70 – 99,20)x73 = \$ 254,57. E assim sucessivamente até o vencimento da opção.

Custo de capital da opção: Inicialmente o negociador comprou 100 contratos de opções com o valor de \$ 2,02 desembolsando \$ 202,00 de caixa. Como visto, o caixa possui um custo de oportunidade. No caso, com a taxa de juros anual de 3% o custo de oportunidade do caixa da opção por dez dias é de:

$$202\left(1{,}03^{\left(\frac{10}{252}\right)}-1\right)=\$0{,}02$$

Custo de capital da ação: Com a venda da ação o negociador recebe capital (caixa) que é aplicado na taxa de juros livre de risco. O lucro diário resultado da remuneração do caixa recebido é mostrado na Tabela 5 e varia com a quantidade de ação vendida. O caixa inicial recebido pela venda da ação é de (52x100) = \$ 5200 e seu custo de capital é calculado como:

$$5200\left(1{,}03^{\left(\frac{10}{252}\right)}-1\right)=\$0{,}61$$

Variando conforme a quantidade de ações vendidas.

O lucro final do negociador é mostrado abaixo:

Hedge Original		Ajuste da posição		Custo de Captal da opção		Custo de Capital da Ação	
R$	(48,40)	R$	106,00	R$	(0,02)	R$	7,41

O lucro final é dado por (-48,00 + 106,00 – 0,02 + 7,41) = $ 65,00

O lucro esperado pelo negociador inicialmente ao observar a opção negociada à 30% de volatilidade pelo preço de $2,02, sabendo-se que a sua volatilidade realizada seria de 40%, valendo $2,67, o seu lucro esperado seria de (2,67 – 2,02)x100 = $65,00.

3.6 Comprado e vendido em volatilidade

No item anterior mostrou-se como o negociador consegue operar a volatilidade realizando operações com a opção e o ativo objeto. No exemplo mostrado o negociador assumiu uma posição comprada na volatilidade do ativo. Quando isto ocorre o comprador de volatilidade espera que o preço do ativo varie o máximo possível obtendo maior lucro.

No caso do vendedor de volatilidade, ocorre o contrário. Ao vender a volatilidade do ativo espera-se que o preço a ação não varie, pois o delta da opção é negativo e quando o preço da ação aumenta, mais ações devem ser compradas e, analogamente, quanto seu preço diminui, mais ações deverão ser vendidas.

Nas figuras 10 e 11 abaixo é mostrado como é a relação entre o lucro e o prejuízo da posição comprada e vendida em volatilidade.

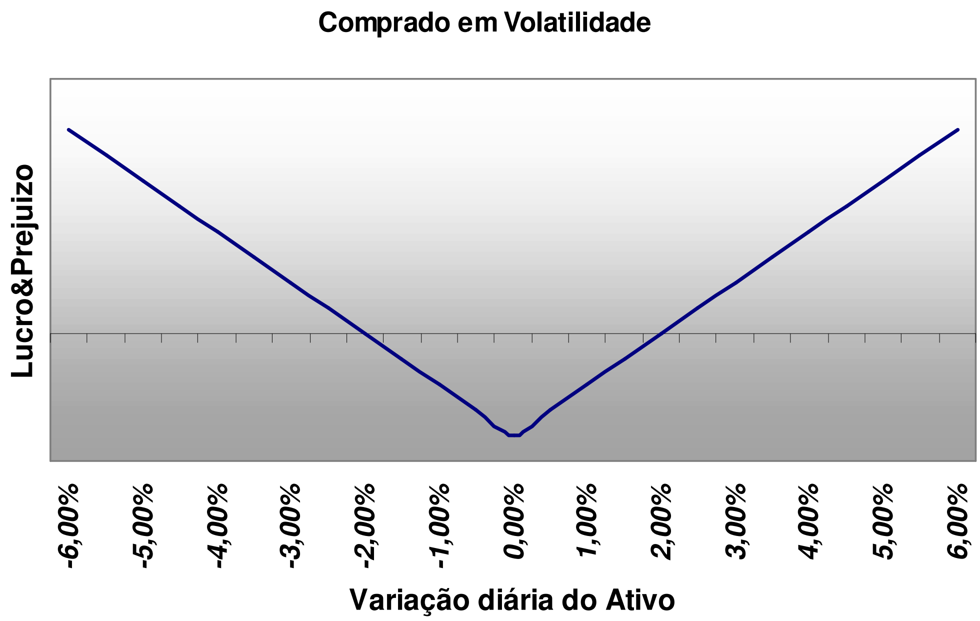


Figura 10 – Gráfico do retorno diário de uma posição comprada em volatilidade – elaborado pelo autor

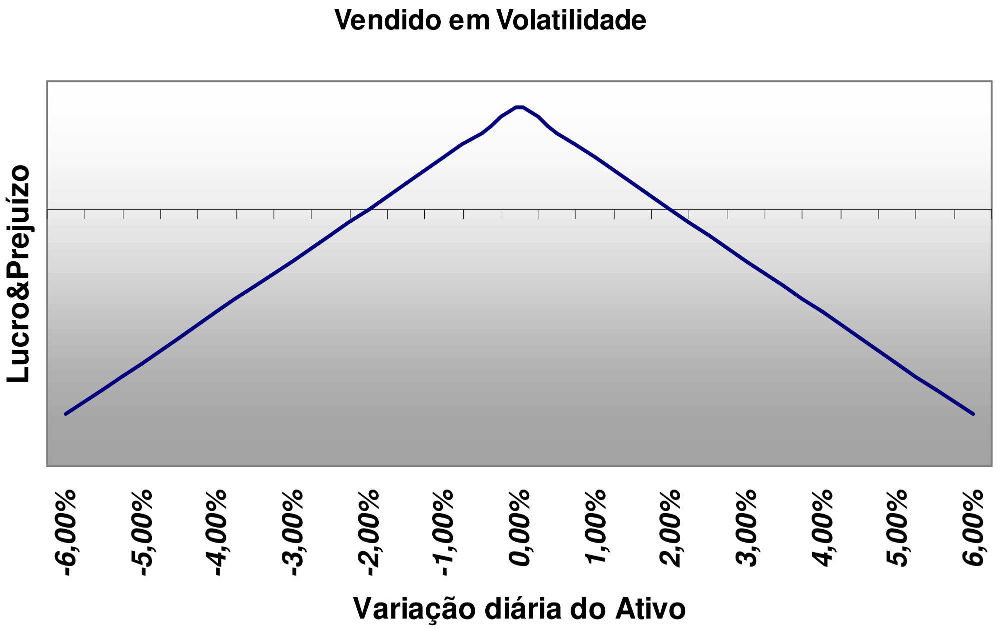


Figura11- Gráfico do retorno diário de uma posição vendida em volatilidade – elaborado pelo autor

As figuras 10 e 11 mostram uma posição comprada em volatilidade e a outra vendida, ambos a uma volatilidade de 31,75% ao ano. Sendo equivalente a uma movimentação diária no ativo de 2%.

Pode-se constatar que o risco do comprador de volatilidade é limitado. Sua perda máxima é a perda do valor da opção com o passar do tempo. E o seu ganho é ilimitado, pois o ganho com a variação do ativo é quadrático. No caso do negociador vendido em volatilidade, ocorre o contrário, este possui seu prejuízo ilimitado e o ganho limitado à perda do valor da opção com o passar do tempo.

Por isso a importância da velocidade de movimentação do mercado para o negociador de volatilidade, como mencionado anteriormente.

3.6. Tipos de curva de volatilidade.

Nos capítulos anteriores introduziu-se a questão de que o modelo de Black&Sholes que parece subavaliar sistematicamente opção que não estão “at the money”. Ou, de outra forma, que os preços de mercado das opções que não estão “in the money” e “out of the money” costumam apresentar volatilidade implícita, maior que as opção “at the money”, formando assim a curva de volatilidade, conhecida pelos negociadores como *smile* de volatilidade, por esta ter a forma de um sorriso.

Será apresentada a seguir a curva de volatilidade implícita observada por preço de exercício. As primeiras curvas de volatilidade observadas no mercado, como dito anteriormente, assemelha-se à um sorriso, pois o gráfico de σ x X (preço de exercício) tem uma forma convexa, como pode-se observar na figura 12 a seguir.

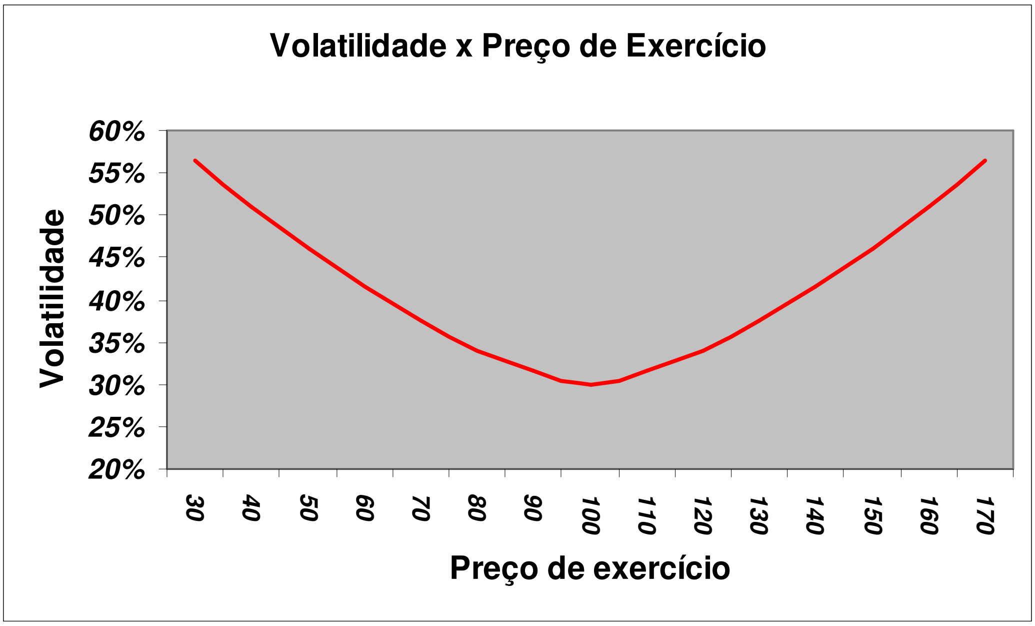


Figura 12 – Gráfico da volatilidade x Preço de exercício, elaborado pelo autor

No mercado, existem outros formatos de curva de volatilidade implícita em função do preço de exercício as quais receberam genericamente o nome de smile. Este tipo de curva, mostrado na figura 12, é notado mais acentuadamente nas proximidades do exercício das opções onde o retorno do negociador para a variação de 1% na volatilidade é muito baixo, chegando ao ponto das opções que não estão “at the money” ter uma diferença de compra e venda englobando muitos pontos de volatilidade.

Este tipo de curva não é observada com freqüência no mercado acionário brasileiro. Ao contrário do mercado de opções de ações, o mercado de opções de dólar é testemunha de vários casos onde este tipo de curva ocorre. Neste mercado, opções bastante “out of the money”, tem liquidez pelo fato de existirem investidores querendo se proteger do pior caso possível, ou seja interessado em protegerem-se de uma desvalorização acentuada do real.

Outro tipo de curva observado, principalmente no mercado de opções de ações é o de volatilidade escalonada, onde as opções “in the money” tem uma volatilidade maior do que as “at the money” e as “out of the money”, conforme mostrado na Figura 13:

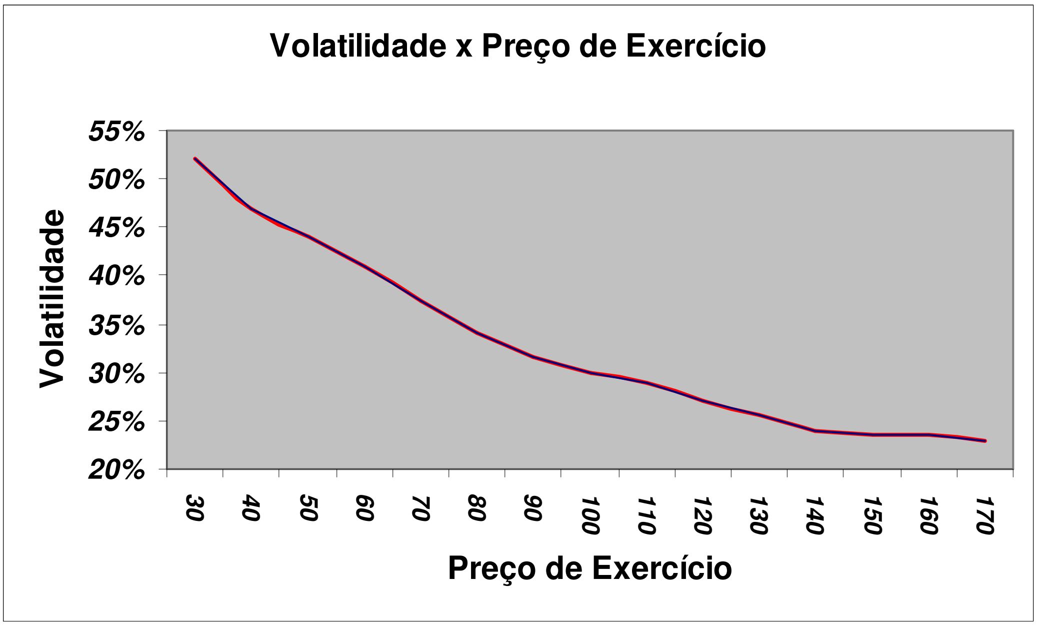


Figura 13 – Gráfico da Volatilidade x Preço de exercício – elaborado pelo autor

Este tipo de curva é mais freqüente no mercado de opções de ações pois a medida que o preço da ação aumenta, sua volatilidade diminui, como explicado anteriormente. Devido principalmente ao seu próprio preço absoluto, e ao grau de alavancagem da empresa.

4. Escolha do Modelo

Após demonstrar quais as causas da formação da curva assimétrica de volatilidade, conceituar e fundamentar os instrumentos necessários para o entendimento e resolução do problema, neste capítulo serão apresentados os modelos pesquisados que propõe encontrar a curva de volatilidade, seus pontos fortes e fracos, determinando, por fim, qual o melhor modelo a ser desenvolvido.

Os modelos pesquisados para determinar a curva de volatilidade, são divididos em dois grupos: os modelos paramétricos e os modelos não paramétricos.

4.1 Modelos Paramétricos

Os modelos paramétricos utilizam-se dos preços das opções do mercado para encontrar a distribuição de probabilidade do ativo utilizando-se desta distribuição para encontrar a sua curva de volatilidade.

4.1.1 Modelo de Mistura de Normais (Bahra, 1997, Gemmill & Saflekis, 2000)

De forma geral, como já citado no capítulo 2, o preço de uma opção de compra européia pode ser representado como:

$$C = e^{-r(T-t)} \int_{x}^{\infty} (S_t - X) q(S_t) dS_t$$

Neste modelo, a densidade de probabilidade q do preço pode ser recuperada a partir da estimação de parâmetros por critérios de minimização da distância entre os preços de mercado e os preços teóricos gerados pelo modelo.

A hipótese Gaussiana representa algumas vantagens práticas, a primeira delas é a estabilidade da densidade Gaussiana sob adição, ou seja, se os preços sob horizonte de um dia tem distribuição de probabilidade lognormal, o mesmo vale para maiores horizontes futuros. Uma outra importante característica prática deste modelo, no que diz respeito a distribuição de probabilidade, é a possibilidade de obter-se expressões analíticas para os preços das opções. Assim, a forma funcional de q seria dada pela mistura de k lognormais:

$$q(S_t) = \sum_{i=1}^{K} w_i Logf(x) \tag{4.1}$$

Onde :

$$\sum_i w_i = 1$$

e

$$w_i > 0$$

f(x) é a função densidade lognormal e wi são os pesos de cada densidade na mistura. No modelo, os parâmetros de f(x) são definidos como:

$$\alpha_i = \ln S_0 + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^{\,2}}{2} \right) T \tag{4.2}$$

$$\beta_i = \sigma_i \sqrt{T} \tag{4.3}$$

Onde μ é a taxa de juros livre de risco; σ é a volatilidade; S o preço do ativo e T o tempo até o vencimento da opção.

Para fins práticos utiliza-se a mistura de duas lognormais:

$$q(St) = wLogf(x_1) + (1 + w)Logf(x_2) \tag{4.4}$$

$$0 < w < 1$$

Isto reduz a necessidade de muitos dados, tendo-se apenas cinco parâmetros a serem estimados (w, α_1 , β_1, α_2 , β_2),

A partir das equações 4.4, 4.3 e 4.2 acima, e dos preços de mercado das opções (Cm) é possível estimar os parâmetros pela minimização do erro quadrático entre estes preços e aqueles gerados pelo modelo de mistura de lognormais:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left(C(X_i, T) - C_{mi} \right)^2 \tag{4.5}$$

Para X_i o preço de exercício da opção e T o tempo até o seu vencimento.

Bahra (1997), em seu modelo de mistura de normais, demonstra que sob a hipótese de lognormalidade a equação de avaliação é uma expressão analítica e esta é uma ponderação dos preços de Black&Sholes com diferentes médias e variâncias. Para o caso de mistura de duas densidades lognormais:

$$C(X,T) = e^{-rT} \left[w\left(e^{\alpha_1 + \beta_1^2/2}\phi_{d1} - X\phi_{d2}\right) + (1-w)(e^{\alpha_{21} + \beta_2^2/2}\phi_{d3} - X\phi_{d4}) \right] \tag{4.6}$$

Onde: ϕ_x é a distribuição Normal acumulada até x é

$$d_1 = \frac{-\ln X + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1} \quad (4.7)$$

;

$$d_2 = d_1 - \beta_1; \quad (4.8)$$

$$d_3 = \frac{-\ln X + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2} \quad (4.9)$$

$$d_4 = d_3 - \beta_2 \quad (4.10)$$

Gemmill e Saflekos (2000) estimaram a densidade de probabilidade de opções sobre o FTSE-100, índice de ações Londrino, usando o modelo de mistura de duas lognormais sobre um período de 10 anos (1987-1997). Os resultados reportados pelos autores demonstram que o modelo supera o modelo de “uma Lognormal” (Black&Sholes) quanto aos ajustes sobre os preços de mercado.

No entanto, o modelo de Mistura de Normais encontra limitações para as soluções dos problemas deste trabalho, visto que negociadores de opções do Banco JP Morgan necessitam de um modelo capaz de obter uma curva de volatilidade para ativos que não possuem opções negociadas no mercado, portanto, não há como parametrizá-lo minimizando o erro quadrático entre as opções de mercado e o gerado pelo modelo.

Além disso conforme demonstrado por Oliveira (2000), no decorrer deste capítulo, o modelo possui problemas de confiabilidade. Empiricamente verificou-se grande sensibilidade às distorções ou escassez de preços. Como resultado disso existe uma grande instabilidade nos parâmetros, o que freqüentemente resulta em soluções de distribuições de probabilidades pouco suaves. A instabilidade na convergência para valores coerentes faz com que o critério de confiabilidade seja um ponto negativo no modelo.

4.2 Modelos Não Paramétricos

Uma das maiores limitações do modelo de Black&Scholes é a hipótese fundamental sobre o processo estocástico dos preços e consequentemente sobre a densidade dos retornos do ativo subjacente supostamente normais. Os modelos não paramétricos tentam superar esta restrição trabalhando com métodos estatísticos que não pressupõe um modelo gerador para os preços. Estes métodos permitem que poucas restrições sejam impostas, dando flexibilidade quase total ao padrão da densidade dos retornos.

Segue abaixo alguns modelos Não Paramétricos pesquisados:

- Modelo de Máxima Suavidade
- Modelo de Máxima Entropia

4.2.1 Modelo de Máxima Suavidade (Jackwerth & Rubinstein, 1996)

O modelo de máxima suavidade, conforme demonstrado nos testes feitos no trabalho de Oliveira (2000), apresenta grande dificuldade de convergência e/ou resultados pouco coerentes, sendo que a implementação sugerida pelos autores, mostrou-se custosa e computacionalmente ineficiente.

Assim sendo, diante da grande quantidade pontos negativos, conforme tabela comparativa de Oliveira (2000), este modelo não será exposto no presente trabalho.

4.2.2 Modelo de máxima Entropia (Stutzer, 1996)

Os modelos paramétricos até então apresentados tem o potencial de minimizar a distância entre os preços observados das opções e os preços teóricos obtidos a partir de uma certa densidade neutralizadora q.

Stutzer (1996) apresenta um método não paramétrico de avaliação, denominado Modelo de Máxima Entropia ou Modelo Canônico, baseado no *princípio da mínima divergência* e derivado dos desenvolvimentos da Teoria da Informação. Uma vantagem deste método, como ressaltam diversos autores (Siqueira,1999, Gulko,1999, Avellaneda 1997, Stutzer 1996), deve-se ao fato de que o objetivo da mínima divergência é bastante atrativo do ponto de vista teórico. Além da fundamentação axiomática deste critério este modelo é considerado menos arbitrário que as demais funções objetivas apresentadas por trabalhar com a minimização de um critério de informação.

Uma outra diferença fundamental para avaliação das curvas de volatilidade de ativos é que no modelo proposto por Stutzer distintamente dos demais modelos paramétricos, é utilizada a própria distribuição de probabilidade histórica como priori de otimização. Com isso, é possível estimar a densidade neutralizadora do preço da incerteza e responder quão diferente ela é se comparada à densidade histórica ou se comparada a densidade de probabilidade encontrada com a praticada pelo mercado. Haveria de se falar na comparação com a densidade de probabilidade do mercado se houvesse opções sobre o ativo sendo negociadas, o que, no entanto, não é o nosso caso.

Por não depender dos preços das opções do mercado, e pelos demais critérios que serão mostrados a seguir, este será o modelo a ser desenvolvido no próximo capítulo.

4.3 Comparação dos Modelos

Oliveira (2000) desenvolveu um trabalho de comparação de diversos modelos para a obtenção da curva de volatilidade utilizando os seguintes critérios:

4.3.1 Eficiência computacional do modelo

Segundo critério de eficiência computacional os modelos foram avaliados pelos custos computacionais e de implementação, levando em consideração a dificuldade de implementação e o tempo para convergência. Logicamente são preferíveis modelos facilmente implementáveis (preferencialmente em planilhas de cálculo) e com respostas que possam ser geradas em tempo real.

No caso deste trabalho, a importância da resposta em tempo real não é tão relevante visto que a precificação das opções que não são negociadas com liquidez no mercado tem uma precificação estruturada podendo demorar quinze minutos ou até dias, portanto, para os negociadores da volatilidade do JP Morgan o importante é um modelo de fácil utilização e com resposta relativamente rápida, não necessáriamente em tempo real. Em entrevista com os negociadores uma resposta rápida significa algo em torno de dez à quinze minutos.

4.3.2 Confiabilidade nos resultados

Uma das maiores vantagens dos modelos como o de Black&Sholes é que neste são utilizadas expressões analíticas e estas, quando corretamente utilizadas, sempre geram resultados confiáveis. No entanto, quando está se trabalhando com modelos dependentes de procedimentos numéricos e de rotinas de otimização isso pode passar a ser um problema.

Caso um modelo apresente dificuldades de convergência, dificilmente poderá ser adotado por uma mesa de operações, visto que, esta necessita de informações rápidas e confiáveis. Desta forma, um sistema que demanda rapidez e muitas vezes processa as informações durante a noite, sem uma supervisão de todo o processo, não pode apresentar dificuldades de convergência.

4.3.3 Facilidade de Uso

Como ressaltam Mendes & Duarte (1998), nas instituições financeiras muitas vezes o usuário de um modelo matemático não é o mesmo que o desenvolveu e o implementou, sendo assim, se não houver um bom entendimento do modelo por parte do usuário, decisões erradas podem ser tomadas.

4.4 Resultado da comparação (Oliveira, 2000)[5]

O resultado da análise segundo os critérios de eficiência operacional discutidos anteriormente: (1) Eficiência computacional, (2) Confiabilidade dos resultados e manutenção, e por fim (3) facilidade de uso serão classificados como “ponto negativo” ou “ponto positivo”, tendo em vista a eficiência relativa dos modelos.

Neste trabalho, entretanto, será acrescentado um quarto item de comparação, (4) a possibilidade de construção do modelo caso não haja opções com liquidez negociadas no mercado**,** pois este é o critério fundamental para resolução do problema proposto. Como apresentado anteriormente, muitos modelos principalmente os paramétricos, partem dos

[5] - Oliveira G., informação implícita sobre o prêmio das opções- Dissertação de Mestrado

preços das opções de mercado para encontrar a curva de volatilidade do ativo.

Alguns outros modelos foram testados por Oliveira, 2000, entretanto, não podem ser utilizados neste trabalho por necessitarem dos preços das opções no mercado para serem construídos.

Tabela 6 – Eficiência Operacional dos Modelos – Elaborado por Oliveira, 2000

Modelo	Eficiência Computacinal e implementação	Confiabiliade e Custo de Manutenção	Facilidade de Uso e entendimento	Não utilização de preços de mercado
Mistura de Normais	+	-	+	-
Máxima Entropia	-	+	+	+
Máxima Suavidade	-	-	-	+

Analisando a Tabela 6 acima, constata-se dentre os modelos comparados, os únicos em que se é possível encontrar a curva de volatilidade onde não há opções sobre o ativo negociado, são os modelos de Máxima Entropia e de Máxima Suavidade.

O modelo de Máxima Suavidade pode ser rapidamente descartado por não apresentar nenhum ponto positivo. O único modelo que satisfaz a restrição de não utilizar preços de opções de mercado como priori de otimização e com importantes “pontos positivos” é o Modelo Canônico de Máxima Entropia.

A dificuldade deste modelo, ou melhor, seu “ponto negativo”, consiste na dificuldade em relação à eficiência computacional e a sua implementação; desafios em sua construção que serão apresentados no capítulo a seguir.

5. Argumentação Teórica, Explicação, e Construção do Modelo.

Neste capítulo será apresentado ao leitor o princípio da Teoria da Informação e da Entropia Relativa; princípios base do modelo a ser desenvolvido. Após o embasamento teórico, o modelo será exposto para finalmente ser construído em planilha eletrônica.

5.1 Argumentação Teórica – Teoria da Informação

5.1.1 Máxima incerteza e equilíbrio de mercado

Os mercados estão supostamente em equilíbrio quando a oferta é igual a demanda, ou seja, quando há o mesmo número de participantes dispostos a comprar e a vender por um mesmo preço determinado ativo.

Se o mercado é eficiente, o potencial comprador de uma ação acredita que esta ação está desvalorizada, e o potencial vendedor inversamente acredita que esta ação está supervalorizada. A diferença de opinião, no equilíbrio, torna a distribuição dos retornos incerta.

Considerando as duas distribuições binomiais abaixo, sendo P a probabilidade do preço da ação aumentar no período de tempo T:

$$X \begin{cases} \nearrow \ \mathbf{P = 99\%} \\ \searrow \ 1\text{-}P = 1\% \end{cases} \qquad\qquad Y \begin{cases} \nearrow \ \mathbf{P = 50\%} \\ \searrow \ 1\text{-}P = 50\% \end{cases}$$

Pode-se dizer que:

- X é mais previsível que Y;
- X não é estável (mais compradores que vendedores);
- Y é mais incerto quanto ao futuro movimento do mercado;
- Y é mais estável (mesmo número de compradores e vendedores);
- Y está em equilibrio.

O equilíbrio tende a ser o mais incerto possível sobre a direção futura do mercado.

5.1.2 Quantificação da Informação

A probabilidade mede a incerteza sobre a ocorrência de um evento aleatório, a entropia mede a incerteza de uma família de eventos aleatórios. Para uma variável aleatória X, o que pode-se deduzir de uma observação em que X = x?

A quantidade de informação convertida pela observação de que X=x, deve depender do quanto a ocorrência desse evento é previsível. Caso todos tenham a expectativa de que o preço de uma ação aumente de valor no dia seguinte e na realidade o preço diminui, o evento imprevisível da queda é mais informativo do que o previsível aumento do preço. O que se quer com a entropia é quantificar a noção de que eventos proporcionam informação.

Pode-se dizer que a função I(p) representa a informação trazida pela ocorrência do evento X = x com probabilidade de ocorrer igual a p. Isto requer que I(p) seja positivo e seja uma função decrescente em relação a p (quanto maior p menor o valor de I). Intuitivamente, pode-se justificar que a função I(p) é não negativa pois qualquer ocorrência de eventos novos gera alguma informação nova.

Considere que X e Y sejam duas variáveis aleatórias discretas

$$P(X = x) = p \qquad (5.1) \qquad\qquad P(Y = y) = q \qquad (5.2)$$

independentes:

Desde que X e Y sejam eventos independentes, a probabilidade conjunta de ocorrência dos eventos é dado por:

$$P(X = x; Y = y) = pq \qquad (5.3)$$

Quando dois eventos independentes, X= x e Y= y, ocorrem, a informação associada a eles I(pq) é dada por:

$$I(pq) = I(p) + I(q) \qquad (5.4)$$

Derivando a expressão acima em relação p e em relação a q tem-se:

$$q\frac{\partial}{\partial(pq)}I(pq) = \frac{\partial}{\partial p}I(p) \qquad (5.5)$$

$$p\frac{\partial}{\partial(pq)}I(pq) = \frac{\partial}{\partial q}I(q) \qquad (5.6)$$

Como X e Y são independentes e, os termos acima devem ser constantes, denotados por –c, temos:

$$I(q) = -c\ln(q) \qquad (5.7)$$

Como 0< q < 1 e I(q) deve ser positivo e uma função decrescente de q, a constante c é positiva. De agora em diante a constante c terá valor 1. Portanto, a informação trazida por um evento que tem probabilidade de ocorrência p é dada por:

$$I(p) = -\ln(p) \qquad (5.8)$$

Considerando que a ação pode ter o seu próximo movimento tanto de alta quanto de baixa:

Probabilidade do preço aumentar **p**

Ação

Probabilidade do preço diminuir **1-p**

A informação convertida pelo movimento de alta é dado por I(p) = -ln(p)

A informação convertida pelo movimento de baixa é dado por I(p) = -ln(1-p)

5.1.3 Entropia.

Seja Y uma variável aleatória discreta, assumindo valores $Y_{1,}...Y_k$ com probabilidade P(Y). A Entropia desta v.a é dada por:

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} p_i(Y)\ \ Logp_i(Y) \qquad (5.9)$$

Visto que qualquer probabilidade p_i é menor ou igual a 1, a entropia será sempre um valor positivo.

A expectativa de um valor alto de informação indica uma distribuição com alta variedade de probabilidades de ocorrência. O valor baixo de informação, implica na distribuição de probabilidade relativamente estreita e portanto, não há muito ganho de informação pela ocorrência de eventos previsíveis. Qualitativamente pode-se dizer que H representa a incerteza da distribuição, um valor alto (baixo) de H corresponde a uma alta (baixa) incerteza.

Se a distribuição Y converge para um único evento isolado J, o qual possui probabilidade p_j= 1 com todos os outros p_i= 0, então H(Y) = 0. Isto corresponde ao menor nível de entropia possível. A entropia tem seu valor máximo, log(n), quando p_i= 1/ n para todos os i, ou seja, quando todas as possibilidades tem a mesma probabilidade e a mesma incerteza. Isto é, o conceito de máxima entropia, corresponde a máxima incerteza e mínima informação.

Pode-se verificar pela definição de entropia (equação 5.9), que esta pode ser escrita como sendo o valor esperado de log *p*(Y), i.e,

$$H(Y) = -E[\log p(Y)] \quad (5.10)$$

O modelo, como será demonstrado posteriormente, utiliza-se do conceito de **entropia relativa** S(p,q) . Este conceito mede a ineficiência em se assumir que uma distribuição é *q* quando a distribuição verdadeira é *p*.

A *entropia relativa* ou *divergência de Kullback* entre duas distribuições p e q é definida por:

$$S(p,q) = \sum p(Y)\log\frac{p(Y)}{q(Y)} = E_{p(Y)}\left[\log\frac{p(Y)}{q(Y)}\right] \qquad (5.11)$$

Onde a ineficiência, diferença entre o valor esperado entre as duas distribuições, é igual à entropia relativa, conforme demostrado abaixo:

$$E_{p(y)}[-\log q(Y)] - H(Y) = E_{p(Y)}[-\log q(Y)] - E_{p(Y)}[-\log p(Y)]$$

$$= E_{p(Y)}[-\log q(Y) + \log p(Y)]$$

$$= E_{p(Y)}\left[\log\frac{p(Y)}{q(Y)}\right] = S(p,q)$$

5.2 O Modelo

O modelo a ser construído neste trabalho foi inicialmente desenvolvido por Stutzer (1996) e é baseado no princípio da mínima divergência derivado dos desenvolvimentos da Teoria da Informação. Ele utiliza a própria densidade de probabilidade histórica p (dos retornos passados) como priori de otimização, encontrando uma nova densidade de probabilidade q. A partir desta nova distribuição, pode-se calcular o novo preço das opções para cada preço de exercício e, com estes preços, encontrar a curva de volatilidade do ativo.

Como já mostrado no capítulo 2, o preço de uma opção européia de compra é dado por:

$$C = e^{-r(T-t)} \int_{X}^{\infty} (S_t - X) q(S_t) dS_t$$

Onde *C* é o preço da opção de compra, *r* é a taxa de juros livre de risco, *X* é o preço de exercício, S_t é o preço da ação no tempo t e $q(S_t)$ é a distribuição de probabilidade de S_t.

Dada a equação para obtenção o preço da opção, a construção do modelo será dividida em três partes:

1. Neste item será obtida a nova distribuição de probabilidade *q* minimizando a entropia relativa entre a distribuição dos retornos histórica *p* e a nova distribuição *q*, obedecendo a restrição de a nova distribuição ter o seu valor esperado $E(S_t)=S_0e^{rT}$, ou seja, o mesmo valor esperado do modelo de Black&Sholes mostrado no capítulo 2;

2. Na segunda parte, será calculado o preço da opção C_i para cada preço de exercício X_i a partir da distribuição q obtida;

3. Por fim, com os preços obtidos no item 2, será utilizado o modelo de Black&Sholes, para determinação da volatilidade implícita de cada preço de exercício construindo assim, a curva assimétrica de volatilidade.

5.2.1 Obtenção da distribuição e probabilidade $q(S_t)$

A obtenção da nova distribuição q é a parte mais complexa e trabalhosa do modelo. A nova distribuição q, obtida através da minimização da entropia relativa é equivalente a translação da distribuição histórica p, recentralizando-a, utilizando a taxa de juros livre de risco do mercado, de forma a alterar o mínimo possível o formato da distribuição original. Ou seja, será colocado o centro da distribuição histórica no centro da distribuição do Black&Sholes, obtendo perdas mínimas no formato da distribuição original.

Pode-se definir S(p, q) como sendo a entropia relativa entre a distribuição de probabilidade inicial *p* e a distribuição subsequente *q*. S mede o decaimento da entropia (ou o aumento da informação) entre a distribuição inicial *p* e a final q, e é dada por:

$$S(p,q) = E_q[\log q - \log p] = \sum_i q_i \log \frac{q_i}{p_i} = -\sum_i q_i \log \frac{p_i}{q_i} \quad (5.12)$$

A Função –log( ) é convexa logo log(pi/qi) é maior que o –log(pi/qi). Então,

$$S(p,q) > -\log \sum_i (q_i \frac{p_i}{q_i}) = -\log \sum_i (p_i) = -\log 1 = 0 \quad (5.13)$$

Portanto S(*p*,*q*) é estritamente não negativa e é zero se e somente se *p*=*q*. S(*p*,*q*) pode ser vista como a distância entre as duas distribuições de probabilidades.

O objetivo é minimizar a relativa entropia ou a "distância" entre duas distribuições de probabilidade.

Considere uma opção de ação com vencimento em T e uma ação com preço à vista igual a $S_{0.}$ Para encontrar o valor da opção tem-se que encontrar a média do retorno sobre uma densidade de probabilidade $q(S_{0,}\ 0; S_t, T)$. Teoricamente q é encontrado solucionando a equação diferencial de Black&Sholes. No modelo de Black&Sholes, como apresentado no capítulo 2, a distribuição de probabilidade do preço da ação é assumido como sendo lognormal e consequentemente os preços de suas opções não possuem nenhuma curva de volatilidade, sendo que todos os preços de exercícios possuem a mesma volatilidade.

Como já exaustivamente mencionado, a teoria de Black&Sholes não condiz com a realidade, A distribuição q a ser obtida, deve ser consistente com a distribuição real dos retornos do ativo. Além disso a distribuição q deve satisfazer a condição de seu valor esperado ser a taxa de juros livre de risco, devido ao custo do capital e a expectativa de retorno do investidor como já apresentado no capítulo 2.

É natural primeiramente levar a adoção da distribuição dos retornos atuais de determinado ativo $p(S_{0,}0,\ S_t,\ T)$. As duas distribuições q e p não podem ser idênticas, pois a expectativa do retorno da ação esperada pelos investidores na distribuição q, como já supramencionado, deve ter o valor da taxa corrente livre de risco, enquanto a expectativa de retorno na distribuição p é a média dos retornos reais da ação, podendo este assumir valor negativo, sem relação com a taxa corrente livre de risco do mercado. A figura 14 a seguir ilustra o exposto acima.

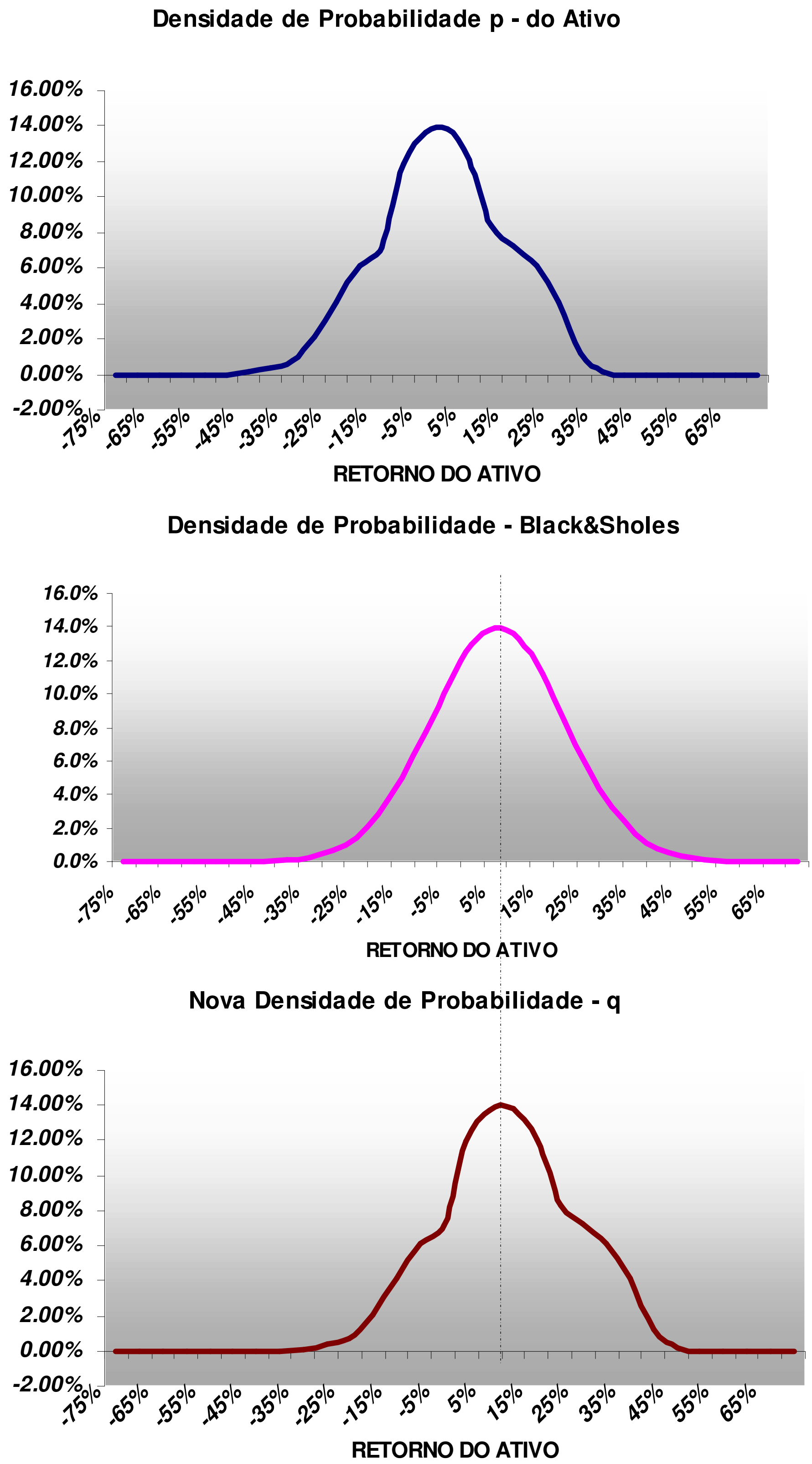


Figura 14 – Nova distribuição q a ser obtida – Elaborado pelo Autor

Estima-se a distribuição dos retornos q de uma ação por sua distribuição histórica p, assumindo que o segundo é um bom estimador do passado e que a relativa entropia S(p,q) entre as duas distribuições seja minimizada. Este critério é imposto na tentativa de evitar qualquer aumento de desvio da informação na criação da distribuição histórica. Será demonstrado que a restrição da minimização na distribuição é a condição em que o valor esperado do preço da ação na distribuição q é consistente com o valor futuro da ação.

Portanto, para encontrar a distribuição q, deve-se minimizar a entropia relativa:

$$MIN\left\{ S(p,q) = E_Q\left[\log\left(\frac{q(S_t)}{p(S_t)} \right) \right] \right\} \tag{5.14}$$

Tal que :

$$\int q(S_T) S_T dS_T = s_0 e^{rT} \tag{5.15}$$

e

$$\int q(S_T) dS_T = 1 \tag{5.16}$$

A resolução da minimização acima não é trivial, e por fugir do escopo do trabalho não será apresentada. Segundo Stutzer 1996, solucionando a minimização com restrições acima tem-se a equação para obter a distribuição q como sendo:

$$q(S_0,0;S_T,T) = \frac{p(S_{0,}0;S_T,T)}{\int p(S_t)\exp(-\lambda S_t)ds} \exp(-\lambda S_t) \tag{5.17}$$

Onde a constante λ pode ser encontrada numericamente tal que a condição do preço futuro abaixo seja satisfeita.

$$\int q_{\lambda}(S_0,0;S_t,T)S_T dS_T = s_0 e^{rT} \qquad (5.18)$$

O problema acima é uma otimização não linear com restrições, o que pode representar problemas computacionais para a obtenção da solução. Felizmente o problema pode ser transformado em uma otimização não restrita, o que simplifica a busca da solução. Pelo método do multiplicador de Lagrange o autor mostra que a solução do problema acima é a seguinte distribuição:

$$\hat{q}(h) = \frac{Exp\left[\hat{\lambda}\frac{R(-h)}{r^T}\right]}{\sum_h Exp\left[\hat{\lambda}\frac{R(-h)}{r^T}\right]}, h = 1,2,....,H-T \qquad (5.19)$$

Esta distribuição é conhecida como “Distribuição Canônica de Gibbs”. Por esta razão o autor batizou o “Modelo de Avaliação Canônico”. Onde r é a taxa de justos livre de risco, T é o número de dias até o vencimento da opção, e R(-h) é a série de retornos passados de tamanho T (mesma maturidade das opções que se quer avaliar), a partir de uma janela móvel sobre a série histórica H de preços passados do ativo S(t) t=-1,-2,…,-H, ou seja, é H-T retornos de T dias calculando como:

$$R(-h) = \frac{S(-h)}{S(-h-T)}, h = 1,2,.....H-T \qquad (5.20)$$

A solução de $\hat{q}$ requer apenas a estimação do multiplicador de Lagrange λ, que, por sua vez, é a solução do seguinte problema de minimização não restrita:

$$\hat{\lambda} = \arg\min \sum_h \exp\left[\lambda\left(\frac{R(-h)}{r^T} - 1\right)\right] \qquad (5.21)$$

$$\lambda[-\infty, +\infty]$$

Utilizando alguma ferramenta de busca direta, no caso deste trabalho, o "Solver" do Excel, pode-se encontrar o multiplicador de Lagrange o qual minimiza a função acima. Obtendo-se o multiplicador torna-se necessário somente a sua substituição na equação de q para a obtenção da nova distribuição .

5.2.2 Ajuste do modelo

Conforme apresentado no capítulo 3, é possível obter a volatilidade do preço de exercício da opção *"at the money"* fazendo uma analise de sua volatilidade histórica ou observando a volatilidade implícita, caso a opção seja negociada no mercado. A volatilidade *"at the money"* deve ser um dos parâmetros a ser inserido pelo usuário, já que esta representa a expectativa da volatilidade realizada do ativo pelo negociador e sendo assim, mais uma restrição a ser incluída no modelo.

Para que a volatilidade da opção *"at the money"* a ser obtida, seja a mesma inserida pelo usuário, deve-se ajustar o modelo de forma que o novo estimador q_{ATM} seja obtido por:

$$\hat{q}_{ATM}(h) = \frac{\exp\left[\lambda_1 \frac{R(-h)}{r^T} + \lambda_2\left(\frac{\max\left[S \cdot R(-h) - X_{ATM}, 0\right]}{r^T}\right)\right]}{\sum \exp\left[\lambda_1 \frac{R(-h)}{r^T} + \lambda_2\left(\frac{\max\left[S \cdot R(-h) - X_{ATM}, 0\right]}{r^T}\right)\right]}, h = 1,2 \ldots H - T \qquad (5.22)$$

Onde os multiplicadores de lagrange λ_1, λ_2 sejam encontrados, solucionando o seguinte problema de minimização não restrita:

$$\hat{\lambda} = \arg Min \sum_h \exp\left[\lambda_1 \frac{R(-h)}{r^T} + \lambda_2\left(\frac{\max\left[S \cdot R(-h) - X_{ATM}, 0\right]}{r^T} - C_{ATM}\right)\right] \qquad (5.23)$$

$$\lambda_1[-\infty, +\infty] \qquad \lambda_2[-\infty, +\infty]$$

Para C_{ATM} o preço da opção de compra *"at the Money"* observada no mercado, inserida pelo usuário.

5.2.3 Obtenção dos preços das opções

A segunda etapa da implementação do modelo de avaliação é o uso da densidade neutralizadora estimada q para o cálculo do preço da opção. No caso, deseja-se avaliar e prever o preço das opções européias de compra para com o preço obtido, estimar a volatilidade implícita utilizando o Black&Sholes. O valor da opção com preço de exercício X, expirando em T, sobre o ativo com preço corrente S_0, é dado por:

$$C_i = \sum_h \left(\frac{\max\left[S \cdot R(-h) - Xi, 0\right]}{r^T} q_{ATM}(h)\right) \qquad (5.24)$$

No capítulo 6 seguinte o modelo será testado comparando-se a curva de volatilidade encontrada com a do curva de volatilidade do índice Bovespa. Cumpre salientar, que para a obtenção da curva de volatilidade será calculado o preço das opções de onze preços de exercícios diferentes, os quais possuem liquidez no mercado, portanto será calculado o preço de C_1, C_2,...,C_{11} de forma que o preço da opção C_6 possua como preço de exercício X_6 *"at the money"* (inserido pelo usuário no modelo), C_1 até C_5 com os preços de exercícios X_1 à X_5 *"in the money"* e C_7 até C_{11} com os preços de exercícios X_7 à X_{11} *"out of the money"*.

5.2.4 Curva de Volatilidade

Encontrados os preços das opções, será utilizado o modelo de Black&Sholes, fazendo uso como entrada dos preços das opções e dos respectivos preços de exercícios, de forma a obter a volatilidade implícita para cada preço, formando a curva de volatilidade do ativo.

5.3 Construção do modelo

Neste ítem será apresentado o algoritmo para a contrução do modelo.

5.3.1 Algoritmo

- Passo 1: Coleta da série histórica do ativo que se quer avaliar;
- Passo 2: Fornecer os Parâmetros : Preço atual do ativo, Volatilidade " At the Money", Taxa de Juros, vencimento da opção e preços de exercícios $X_1 \ldots X_n$;
- Passo 3: Calcular o número de dias úteis até o vencimento da opção;
- Passo 4: Calcular a Taxa de Juros efetiva até o vencimento da opção;
- Passo 5: Calcular o preço da opção de compra *"at the money"* utilizando o modelo de Black&Sholes com os parâmetros inseridos (Volatilidade *"at the Money"* , preço de exercício" At the money" ,

preço atual do ativo, taxa de juros, e vencimento) ou simplismente utilizar o preço observado no mercado.

- Passo 6: Utilizando a base de preços histórica, calcular o R(-h), série de retornos de tamanho T (número de dias até o vencimeto da opção) conforme a equção 5.20.
- Passo 7: Calcular o retorno descontado a taxa de juros efetiva do

$$\frac{R(-h)}{r^T} - 1$$

período calculada no passo 4, conforme a equação abaixo:

Onde r^T é a taxa de juros efetiva e R(-h) o retorno

- Passo 8 Calcular:

$$\left(\frac{Máx\left[S_o R(-h) - X_{ATM}, 0\right]}{r^T} - C_{ATM} \right)$$

Onde C_{ATM} é o valor do preço da opção de compra calculada no passo 5, S_0 o preço autal do ativo, R(-h) o retorno, r^T a taxa efetiva e X_{ATM} preço de exercício "*at the Money*"

- Passo 9: Calcular

$$Exp\left[\lambda_1 \left(\frac{R(-h)}{r^T} - 1 \right) + \lambda_2 \left(\frac{Máx\left[S_o R(-h) - X_{ATM}, 0\right]}{r^T} - C_{ATM} \right) \right]$$

Onde λ_1 e λ_2 são os multplicadores de Lagrange com valor inicial qualquer. Utilizando um software de busca restrita direta, encontrar os multiplicadores de Lagrange que minimizam a expressão 5.23 acima.

- Passo 10: Calcular a distribuição de probabilidade q_{ATM}, utilizando os dados obtidos no passo, conforme expressão 5.22.

- Passo 11: obtido o estimador q_{ATM}, calcular os preços das opções de compra C_1 até C_n utilizando os preços de exercícios X_1 até X_n.

$$C_i = \sum_h \left(\frac{\max[S \cdot R(-h) - Xi,0]}{r^T} q_{ATM}(h) \right)$$

- Passo 12: Com os preços das opções $C_1 \ldots . C_N$ utilizar o modelo de Black&Sholes utilizando como parâmetro os preços das opções de compra obtidas de forma a obter a volatilidade para cada preço de exercício.

5.3.2 Apresentação da construção em planilha.

O modelo construído neste trabalho foi elaborado de forma que usuário interfira o mínimo possível, evitando assim erros.

Para isso foram construídas três planilhas, a “Planilha Principal” , “Planilha de Cálculo” e a “Planilha DataBase”.

A Planilha Principal, é onde o usuário interage com o modelo, nela são inseridos os parâmetros para encontrar a curva de volatilidade do ativo, e na mesma planilha o resultado é apresentado, não havendo necessidade do usuário interagir com outras parte do modelo.

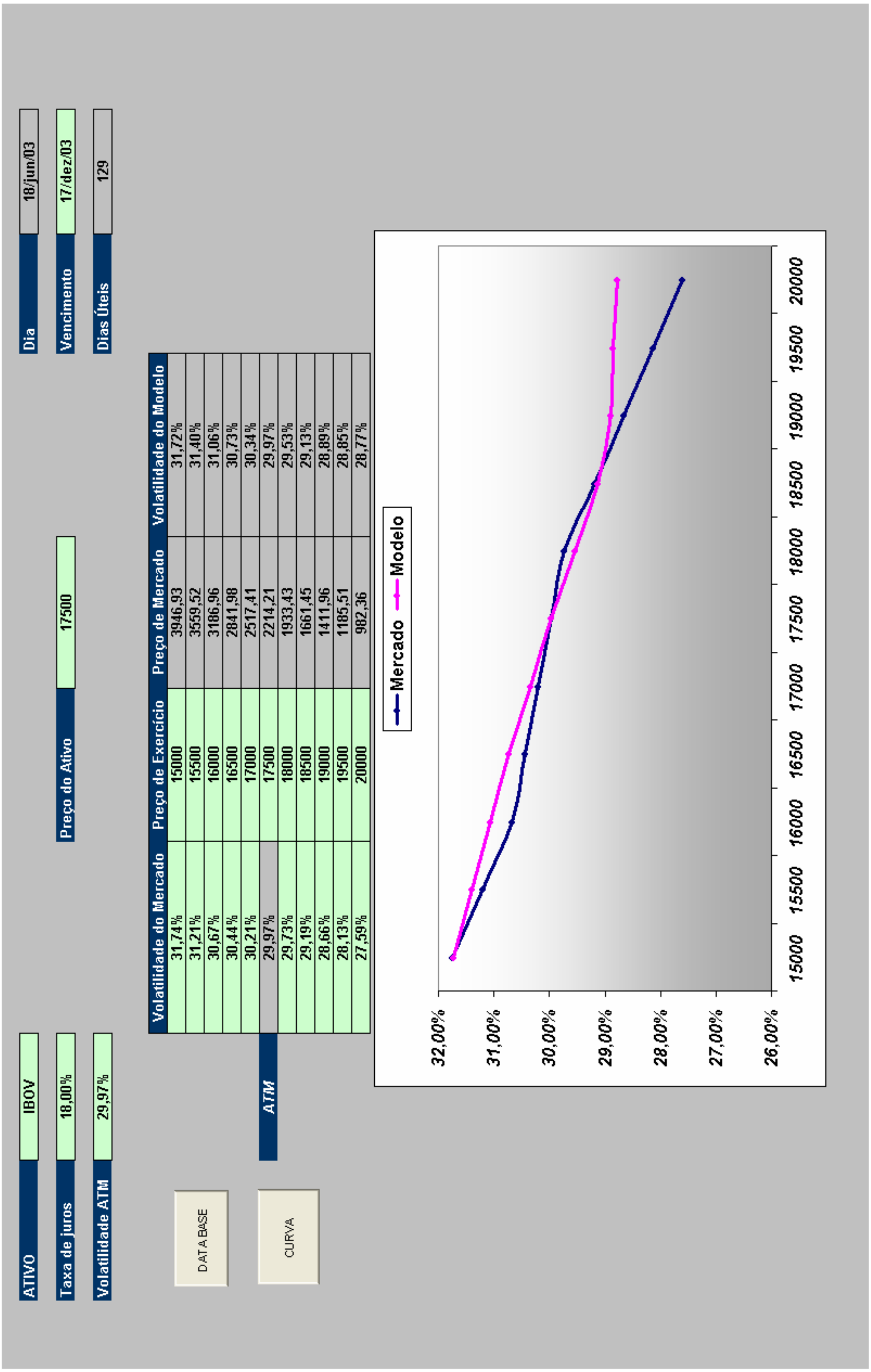
Para facilitar a utilização, foram criadas funções em Visual Basic, e “Macros” para auxiliar na obtenção dos resultados e diminuir a necessidade de contato do usuário com o modelo.

A função BS cuja listagem é apresentada em anexo, é responsável pelo cálculo do preço da opção pelo modelo de Black&Sholes. A função BSVOL calcula a volatilidade do ativo dado o preço da opção e os demais parâmetros, sua listagem também é apresentada em anexo.

A “Macro” DataBase, busca os preços históricos do ativo que se quer avaliar da Planilha database passando-os para a planilha de cálculo. A “Macro” Curva, aciona os cálculos para obtenção do resultado.

A Planilha de cálculo é onde o algoritmo para solução do problema é desenvolvido, a apresentação e explicação dos campos da planilha será mostrada adiante.

A Planilha DataBase, possui os preços históricos das 57 ações do Índice Bovespa de 16 de novembro de 2000, até os preços do dia anterior ao dia atual, essa data base é atualisada diariamente pelo Banco JP Morgan.



Volatilidade do Mercado	Preço de Exercício	Preço de Mercado	Volatilidade do Modelo
31,74%	15000	3946,93	31,72%
31,21%	15500	3559,52	31,40%
30,67%	16000	3186,96	31,06%
30,44%	16500	2841,98	30,73%
30,21%	17000	2517,41	30,34%
29,97%	17500	2214,21	29,97%
29,73%	18000	1933,43	29,53%
29,19%	18500	1661,45	29,13%
28,66%	19000	1411,96	28,89%
28,13%	19500	1185,51	28,85%
27,59%	20000	982,36	28,77%

5.3.2.1 “Planilha Principal”

Nesta planilha como dito anteriormente, o usuário deverá inserir os dados para a resolução do problema.

Segue abaixo a explanação de cada campo:

- Campo Ativo: O usuário insere o nome do ativo que se quer avaliar.
- Campo Preço do Ativo: Usuário insere o preço atual do ativo S_o;
- Campo Volatilidade ATM: Usuário insere a volatilidade *“at the Money”* observada no mercado ou na análise da volatilidade histórica.
- Campo Taxa de Juros: Usuário insere a taxa de juros ao ano para o vencimento da opção.
- Campo Vencimento: Usuário insere a data de vencimento da opção.
- Coluna Preço de Exercício : Nesta coluna são inseridos os onze preços de exercícios que se quer avaliar
- Coluna Volatilidade do Mercado: Caso haja opções com liquidez o usuário pode inserir as volatilidades observadas no mercado para compará-las com o obtido pelo modelo
- Campo ATM: Traz automaticamente a volatilidade *“at the Money“* inserida pelo usuário
- Campo dias úteis: esse campo calcula o número de dias úteis até o vencimento da opção
- Campo dia: Traz o dia corrente
- Coluna Preço de Mercado: Calcula os preços das opções utilizando a função BS e os parâmetros (Volatilidade, preço do ativo, dias para o vencimento, taxa de juros) inseridos pelo usuário.

- Coluna Volatilidade do Modelo: Retorna as volatilidades obtidas na planilha de cálculo para cada preço de exercício
- Macro Data Base: Aciona a "Macro" DataBase, que busca os preços históricos da ativo do campo Ativo da planilha data base, inserindo-os na planilha de calculo.
- Macro Curva: Aciona a "Macro" Curva que aciona o calculo na plainlha de cálculo.
- Gráfico: Mostra a curva do mercado e a curva encontrada no modelo.

Preço do Ativo (So)	17000
Taxa de Juros	18,00%
Taxa de juros efetiva	8,84%
Dias até o vencimento	129
Somatória	592,866

Opção	1	2	3	4	5	ATM	7	8	9	10	11
Preço de exercício	15000	15500	16000	16500	17000	17500	18000	18500	19000	19500	20000
Preço da opção	3.514	3.149	2.802	2.475	2.167	1.881	1.616	1.376	1.167	990	833
Preço de Mercado						1.881					
Volatilidade	31,72%	31,40%	31,06%	30,73%	30,34%	29,97%	29,53%	29,13%	28,89%	28,85%	28,77%

A Data	B Preço	C R(-h)	D S * h	E R(-h)/rT	F Exp(L*(R(h)/rT)	G q (h)	H Max(So-X,0)atm	I Soma
9/10/03	17.708	46,77%	24.951	34,85%	1,672	0,21%	(1)	1,24
8/10/03	17.805	48,30%	25.211	36,25%	1,740	0,21%	(2)	1,23
7/10/03	17.805	49,97%	25.495	37,79%	1,813	0,21%	(2)	1,22
6/10/03	17.273	49,01%	25.331	36,90%	1,771	0,21%	(2)	1,23
3/10/03	17.089	51,59%	25.771	39,28%	1,885	0,20%	(2)	1,21
2/10/03	16.893	48,24%	25.200	36,19%	1,737	0,21%	(2)	1,23
1/10/03	16.578	47,58%	25.089	35,59%	1,708	0,21%	(1)	1,23
30/9/03	16.010	42,87%	24.288	31,26%	1,500	0,21%	(1)	1,26
29/9/03	16.108	43,41%	24.380	31,76%	1,524	0,21%	(1)	1,26
26/9/03	15.810	43,05%	24.319	31,43%	1,508	0,21%	(1)	1,26
25/9/03	15.806	38,93%	23.618	27,64%	1,327	0,22%	(1)	1,29
24/9/03	16.057	43,91%	24.464	32,22%	1,546	0,21%	(1)	1,26
23/9/03	16.443	49,40%	25.398	37,26%	1,788	0,21%	(2)	1,22
22/9/03	16.485	47,85%	25.134	35,84%	1,720	0,21%	(2)	1,23
19/9/03	16.851	54,97%	26.344	42,38%	2,034	0,20%	(2)	1,19
18/9/03	16.889	56,13%	26.543	43,45%	2,085	0,20%	(2)	1,18
17/9/03	16.492	52,94%	26.001	40,52%	1,944	0,20%	(2)	1,20
16/9/03	16.269	53,74%	26.136	41,25%	1,980	0,20%	(2)	1,20
15/9/03	16.341	58,05%	26.869	45,21%	2,170	0,20%	(2)	1,17
12/9/03	16.421	59,30%	27.082	46,36%	2,225	0,20%	(2)	1,16
11/9/03	16.292	51,94%	25.829	39,59%	1,900	0,20%	(2)	1,21
10/9/03	15.983	50,57%	25.597	38,34%	1,840	0,21%	(2)	1,22
9/9/03	15.718	52,53%	25.930	40,14%	1,926	0,20%	(2)	1,20
8/9/03	16.050	56,13%	26.542	43,44%	2,085	0,20%	(2)	1,18
5/9/03	15.899	56,64%	26.629	43,92%	2,107	0,20%	(2)	1,18
4/9/03	15.704	57,13%	26.713	44,37%	2,129	0,20%	(2)	1,18
3/9/03	15.633	53,40%	26.078	40,94%	1,965	0,20%	(2)	1,20
2/9/03	15.454	50,73%	25.624	38,48%	1,847	0,20%	(2)	1,22
1/9/03	15.352	48,62%	25.265	36,54%	1,754	0,21%	(2)	1,23
29/8/03	15.174	48,53%	25.250	36,47%	1,750	0,21%	(2)	1,23
28/8/03	15.064	46,95%	24.982	35,01%	1,680	0,21%	(1)	1,24
27/8/03	15.142	44,91%	24.635	33,14%	1,590	0,21%	(1)	1,25
26/8/03	14.877	46,02%	24.824	34,16%	1,639	0,21%	(1)	1,24
25/8/03	14.473	43,58%	24.409	31,92%	1,532	0,21%	(1)	1,26
22/8/03	14.613	44,58%	24.579	32,84%	1,576	0,21%	(1)	1,25
21/8/03	14.669	39,59%	23.729	28,25%	1,355	0,22%	(1)	1,29
20/8/03	14.466	37,65%	23.401	26,47%	1,270	0,22%	(1)	1,30
19/8/03	14.157	35,10%	22.967	24,12%	1,158	0,22%	(1)	1,32
18/8/03	14.146	36,28%	23.168	25,21%	1,210	0,22%	(1)	1,31
15/8/03	13.889	31,46%	22.349	20,78%	0,997	0,23%	(1)	1,34
14/8/03	13.812	30,41%	22.170	19,82%	0,951	0,23%	(1)	1,35
13/8/03	13.682	29,36%	21.991	18,85%	0,904	0,23%	(1)	1,35
12/8/03	13.602	24,67%	21.195	14,55%	0,698	0,23%	(0)	1,39
11/8/03	13.560	23,94%	21.069	13,87%	0,666	0,23%	(0)	1,39
8/8/03	13.499	25,57%	21.347	15,37%	0,738	0,23%	(0)	1,38
7/8/03	13.328	22,69%	20.858	12,72%	0,611	0,24%	(0)	1,40
6/8/03	12.887	22,55%	20.833	12,59%	0,604	0,24%	(0)	1,40
5/8/03	13.059	24,03%	21.085	13,95%	0,670	0,23%	(0)	1,39
4/8/03	12.938	19,99%	20.397	10,24%	0,491	0,24%	(0)	1,42
1/8/03	13.129	17,62%	19.996	8,07%	0,387	0,24%	(0)	1,44
31/7/03	13.571	21,80%	20.706	11,91%	0,571	0,24%	(0)	1,41
30/7/03	13.474	17,84%	20.033	8,27%	0,397	0,24%	(0)	1,44
29/7/03	13.623	16,96%	19.882	7,45%	0,358	0,24%	0	1,44
28/7/03	13.643	16,86%	19.866	7,36%	0,353	0,24%	0	1,44
25/7/03	13.750	15,05%	19.559	5,71%	0,274	0,25%	0	1,46
24/7/03	13.761	14,95%	19.542	5,61%	0,269	0,25%	0	1,46
23/7/03	13.798	13,34%	19.268	4,13%	0,198	0,25%	0	1,47
22/7/03	13.835	14,24%	19.422	4,96%	0,238	0,25%	0	1,46
21/7/03	13.675	11,71%	18.990	2,63%	0,126	0,25%	0	1,48
18/7/03	13.794	15,81%	19.688	6,40%	0,307	0,24%	0	1,45
17/7/03	13.622	15,59%	19.650	6,20%	0,297	0,24%	0	1,45
16/7/03	13.487	13,57%	19.306	4,34%	0,208	0,25%	0	1,47
15/7/03	13.614	13,27%	19.256	4,07%	0,195	0,25%	0	1,47
14/7/03	13.588	17,14%	19.913	7,62%	0,366	0,24%	(0)	1,44
11/7/03	13.320	14,81%	19.517	5,48%	0,263	0,25%	0	1,46
10/7/03	13.501	19,82%	20.369	10,08%	0,484	0,24%	(0)	1,42
8/7/03	13.618	21,22%	20.608	11,37%	0,546	0,24%	(0)	1,41
7/7/03	13.402	18,41%	20.130	8,79%	0,422	0,24%	(0)	1,43
4/7/03	13.273	15,72%	19.672	6,32%	0,303	0,24%	0	1,45
3/7/03	13.134	14,32%	19.434	5,03%	0,241	0,25%	0	1,46
2/7/03	13.310	18,77%	20.190	9,12%	0,437	0,24%	(0)	1,43
1/7/03	13.291	21,00%	20.571	11,17%	0,536	0,24%	(0)	1,41
30/6/03	12.972	19,76%	20.359	10,03%	0,481	0,24%	(0)	1,42
27/6/03	13.024	20,92%	20.556	11,09%	0,532	0,24%	(0)	1,41
26/6/03	13.111	24,11%	21.099	14,03%	0,673	0,23%	(0)	1,39
25/6/03	13.025	23,04%	20.917	13,04%	0,626	0,24%	(0)	1,40
24/6/03	13.108	23,51%	20.997	13,48%	0,647	0,24%	(0)	1,39
23/6/03	12.991	25,75%	21.377	15,53%	0,745	0,23%	(0)	1,38
20/6/03	13.130	27,01%	21.591	16,69%	0,801	0,23%	(0)	1,37
18/6/03	13.510	27,83%	21.731	17,44%	0,837	0,23%	(1)	1,36
17/6/03	13.776	32,30%	22.490	21,55%	1,034	0,23%	(1)	1,33
16/6/03	13.832	30,00%	22.100	19,44%	0,933	0,23%	(1)	1,35
13/6/03	13.733	28,80%	21.897	18,34%	0,880	0,23%	(1)	1,36
12/6/03	13.982	31,00%	22.271	20,36%	0,977	0,23%	(1)	1,34
11/6/03	13.876	32,05%	22.449	21,32%	1,023	0,23%	(1)	1,34
10/6/03	13.893	35,69%	23.067	24,66%	1,184	0,22%	(1)	1,31
9/6/03	13.845	35,39%	23.016	24,39%	1,170	0,22%	(1)	1,31
6/6/03	13.923	37,43%	23.363	26,27%	1,260	0,22%	(1)	1,30
5/6/03	13.779	34,49%	22.864	23,57%	1,131	0,22%	(1)	1,32
4/6/03	13.718	31,85%	22.415	21,14%	1,015	0,23%	(1)	1,34
3/6/03	13.350	29,75%	22.058	19,21%	0,922	0,23%	(1)	1,35
2/6/03	13.228	31,14%	22.294	20,49%	0,983	0,23%	(1)	1,34
30/5/03	13.421	34,60%	22.882	23,67%	1,136	0,22%	(1)	1,32
29/5/03	13.405	34,45%	22.857	23,53%	1,129	0,22%	(1)	1,32
28/5/03	13.294	34,50%	22.865	23,57%	1,131	0,22%	(1)	1,32
27/5/03	13.246	35,68%	23.065	24,65%	1,183	0,22%	(1)	1,31
26/5/03	12.852	32,22%	22.478	21,48%	1,031	0,23%	(1)	1,33
23/5/03	13.142	32,95%	22.601	22,15%	1,063	0,22%	(1)	1,33
22/5/03	13.100	32,86%	22.586	22,07%	1,059	0,22%	(1)	1,33
21/5/03	13.033	33,00%	22.611	22,20%	1,065	0,22%	(1)	1,33
20/5/03	12.745	31,36%	22.332	20,69%	0,993	0,23%	(1)	1,34
19/5/03	12.745	29,25%	21.972	18,75%	0,900	0,23%	(1)	1,35
16/5/03	13.224	33,41%	22.680	22,58%	1,083	0,22%	(1)	1,33
15/5/03	13.129	29,48%	22.011	18,96%	0,910	0,23%	(1)	1,35
14/5/03	13.459	32,38%	22.504	21,63%	1,038	0,22%	(1)	1,33
13/5/03	13.420	33,29%	22.660	22,47%	1,078	0,22%	(1)	1,33
12/5/03	13.320	38,75%	23.588	27,48%	1,319	0,22%	(1)	1,29
9/5/03	13.214	38,03%	23.466	26,82%	1,287	0,22%	(1)	1,30
8/5/03	12.920	29,02%	21.933	18,54%	0,890	0,23%	(1)	1,36
7/5/03	12.956	32,22%	22.477	21,48%	1,031	0,23%	(1)	1,33
6/5/03	12.643	28,49%	21.843	18,05%	0,866	0,23%	(1)	1,36
5/5/03	12.832	37,52%	23.378	26,35%	1,264	0,22%	(1)	1,30
2/5/03	12.810	40,34%	23.857	28,94%	1,389	0,22%	(1)	1,28
30/4/03	12.556	39,17%	23.659	27,87%	1,337	0,22%	(1)	1,29
29/4/03	12.677	42,42%	24.212	30,85%	1,481	0,21%	(1)	1,27
28/4/03	12.462	48,89%	25.311	36,79%	1,766	0,21%	(2)	1,23
25/4/03	12.126	42,56%	24.235	30,98%	1,487	0,21%	(1)	1,27
24/4/03	12.120	43,43%	24.383	31,78%	1,525	0,21%	(1)	1,26
23/4/03	12.394	39,98%	23.797	28,61%	1,373	0,22%	(1)	1,28
22/4/03	12.452	40,45%	23.876	29,04%	1,393	0,22%	(1)	1,28
17/4/03	12.395	42,24%	24.181	30,69%	1,473	0,21%	(1)	1,27
16/4/03	12.043	36,14%	23.144	25,08%	1,204	0,22%	(1)	1,31
15/4/03	12.106	36,59%	23.220	25,49%	1,223	0,22%	(1)	1,31
14/4/03	11.873	28,23%	21.799	17,81%	0,855	0,23%	(1)	1,36

A Data	Opt 1 Max(So-X,0)1	Opt 2 Max(So-X,0)2	Opt 3 Max(So-X,0)3	Opt 4 Max(So-X,0)4	Opt 5 Max(So-X,0)5	Opt 6 Max(So-X,0)6	Opt 7 Max(So-X,0)7	Opt 8 Max(So-X,0)8	Opt 9 Max(So-X,0)9	Opt 10 Max(So-X,0)10	Opt 11 Max(So-X,0)11
9/10/03	9.143	8.684	8.224	7.765	7.305	6.846	6.387	5.927	5.468	5.009	4.549
8/10/03	9.381	8.922	8.463	8.003	7.544	7.084	6.625	6.166	5.706	5.247	4.788
7/10/03	9.643	9.183	8.724	8.265	7.805	7.346	6.887	6.427	5.968	5.508	5.049
6/10/03	9.492	9.033	8.573	8.114	7.655	7.195	6.736	6.276	5.817	5.358	4.898
3/10/03	9.896	9.436	8.977	8.518	8.058	7.599	7.139	6.680	6.221	5.761	5.302
2/10/03	9.372	8.912	8.453	7.993	7.534	7.075	6.615	6.156	5.696	5.237	4.778
1/10/03	9.269	8.810	8.351	7.891	7.432	6.973	6.513	6.054	5.594	5.135	4.676
30/9/03	8.533	8.074	7.615	7.155	6.696	6.236	5.777	5.318	4.858	4.399	3.940
29/9/03	8.618	8.159	7.699	7.240	6.780	6.321	5.862	5.402	4.943	4.484	4.024
26/9/03	8.562	8.102	7.643	7.184	6.724	6.265	5.805	5.346	4.887	4.427	3.968
25/9/03	7.918	7.459	6.999	6.540	6.080	5.621	5.162	4.702	4.243	3.783	3.324
24/9/03	8.695	8.236	7.776	7.317	6.858	6.398	5.939	5.479	5.020	4.561	4.101
23/9/03	9.553	9.094	8.635	8.175	7.716	7.256	6.797	6.338	5.878	5.419	4.960
22/9/03	9.311	8.851	8.392	7.933	7.473	7.014	6.555	6.095	5.636	5.176	4.717
19/9/03	10.423	9.963	9.504	9.044	8.585	8.126	7.666	7.207	6.748	6.288	5.829
18/9/03	10.605	10.146	9.686	9.227	8.768	8.308	7.849	7.389	6.930	6.471	6.011
17/9/03	10.107	9.648	9.188	8.729	8.269	7.810	7.351	6.891	6.432	5.972	5.513
16/9/03	10.231	9.772	9.313	8.853	8.394	7.935	7.475	7.016	6.556	6.097	5.638
15/9/03	10.905	10.445	9.986	9.527	9.067	8.608	8.148	7.689	7.230	6.770	6.311
12/9/03	11.100	10.641	10.181	9.722	9.263	8.803	8.344	7.884	7.425	6.966	6.506
11/9/03	9.949	9.490	9.030	8.571	8.112	7.652	7.193	6.734	6.274	5.815	5.355
10/9/03	9.736	9.277	8.817	8.358	7.899	7.439	6.980	6.520	6.061	5.602	5.142
9/9/03	10.042	9.582	9.123	8.664	8.204	7.745	7.286	6.826	6.367	5.907	5.448
8/9/03	10.604	10.145	9.685	9.226	8.767	8.307	7.848	7.389	6.929	6.470	6.010
5/9/03	10.684	10.225	9.765	9.306	8.847	8.387	7.928	7.468	7.009	6.550	6.090
4/9/03	10.761	10.302	9.843	9.383	8.924	8.464	8.005	7.546	7.086	6.627	6.167
3/9/03	10.178	9.719	9.259	8.800	8.341	7.881	7.422	6.962	6.503	6.044	5.584
2/9/03	9.760	9.301	8.842	8.382	7.923	7.464	7.004	6.545	6.085	5.626	5.167
1/9/03	9.431	8.971	8.512	8.053	7.593	7.134	6.675	6.215	5.756	5.296	4.837
29/8/03	9.418	8.958	8.499	8.040	7.580	7.121	6.661	6.202	5.743	5.283	4.824
28/8/03	9.171	8.711	8.252	7.793	7.333	6.874	6.415	5.955	5.496	5.036	4.577
27/8/03	8.853	8.393	7.934	7.474	7.015	6.556	6.096	5.637	5.177	4.718	4.259
26/8/03	9.026	8.567	8.107	7.648	7.189	6.729	6.270	5.810	5.351	4.892	4.432
25/8/03	8.644	8.185	7.726	7.266	6.807	6.348	5.888	5.429	4.969	4.510	4.051
22/8/03	8.801	8.342	7.882	7.423	6.963	6.504	6.045	5.585	5.126	4.666	4.207
21/8/03	8.020	7.561	7.102	6.642	6.183	5.723	5.264	4.805	4.345	3.886	3.426
20/8/03	7.719	7.259	6.800	6.340	5.881	5.422	4.962	4.503	4.044	3.584	3.125
19/8/03	7.320	6.860	6.401	5.941	5.482	5.023	4.563	4.104	3.645	3.185	2.726
18/8/03	7.504	7.045	6.586	6.126	5.667	5.207	4.748	4.289	3.829	3.370	2.910
15/8/03	6.752	6.292	5.833	5.373	4.914	4.455	3.995	3.536	3.077	2.617	2.158
14/8/03	6.588	6.128	5.669	5.210	4.750	4.291	3.831	3.372	2.913	2.453	1.994
13/8/03	6.423	5.963	5.504	5.045	4.585	4.126	3.666	3.207	2.748	2.288	1.829
12/8/03	5.691	5.232	4.773	4.313	3.854	3.395	2.935	2.476	2.016	1.557	1.098
11/8/03	5.576	5.117	4.658	4.198	3.739	3.279	2.820	2.361	1.901	1.442	982
8/8/03	5.832	5.372	4.913	4.453	3.994	3.535	3.075	2.616	2.157	1.697	1.238
7/8/03	5.382	4.922	4.463	4.004	3.544	3.085	2.625	2.166	1.707	1.247	788
6/8/03	5.359	4.900	4.440	3.981	3.522	3.062	2.603	2.143	1.684	1.225	765
5/8/03	5.591	5.131	4.672	4.212	3.753	3.294	2.834	2.375	1.916	1.456	997
4/8/03	4.959	4.500	4.040	3.581	3.121	2.662	2.203	1.743	1.284	825	365
1/8/03	4.590	4.131	3.671	3.212	2.752	2.293	1.834	1.374	915	456	-
31/7/03	5.243	4.783	4.324	3.864	3.405	2.946	2.486	2.027	1.567	1.108	649
30/7/03	4.624	4.165	3.705	3.246	2.787	2.327	1.868	1.409	949	490	30
29/7/03	4.486	4.026	3.567	3.108	2.648	2.189	1.730	1.270	811	351	-
28/7/03	4.470	4.011	3.552	3.092	2.633	2.173	1.714	1.255	795	336	-
25/7/03	4.189	3.729	3.270	2.811	2.351	1.892	1.432	973	514	54	-
24/7/03	4.173	3.714	3.254	2.795	2.335	1.876	1.417	957	498	39	-
23/7/03	3.921	3.462	3.002	2.543	2.084	1.624	1.165	705	246	-	-
22/7/03	4.062	3.603	3.144	2.684	2.225	1.765	1.306	847	387	-	-
21/7/03	3.666	3.206	2.747	2.288	1.828	1.369	910	450	-	-	-
18/7/03	4.307	3.847	3.388	2.929	2.469	2.010	1.550	1.091	632	172	-
17/7/03	4.272	3.813	3.353	2.894	2.435	1.975	1.516	1.056	597	138	-
16/7/03	3.956	3.497	3.038	2.578	2.119	1.659	1.200	741	281	-	-
15/7/03	3.910	3.451	2.992	2.532	2.073	1.613	1.154	695	235	-	-
14/7/03	4.514	4.055	3.596	3.136	2.677	2.217	1.758	1.299	839	380	-
11/7/03	4.150	3.691	3.232	2.772	2.313	1.853	1.394	935	475	16	-
10/7/03	4.933	4.473	4.014	3.555	3.095	2.636	2.176	1.717	1.258	798	339
8/7/03	5.152	4.693	4.233	3.774	3.315	2.855	2.396	1.936	1.477	1.018	558
7/7/03	4.713	4.254	3.795	3.335	2.876	2.417	1.957	1.498	1.038	579	120
4/7/03	4.293	3.833	3.374	2.915	2.455	1.996	1.536	1.077	618	158	-
3/7/03	4.074	3.614	3.155	2.696	2.236	1.777	1.318	858	399	-	-
2/7/03	4.768	4.309	3.850	3.390	2.931	2.472	2.012	1.553	1.093	634	175
1/7/03	5.118	4.659	4.199	3.740	3.280	2.821	2.362	1.902	1.443	984	524
30/6/03	4.923	4.464	4.004	3.545	3.086	2.626	2.167	1.708	1.248	789	329
27/6/03	5.105	4.645	4.186	3.726	3.267	2.808	2.348	1.889	1.430	970	511
26/6/03	5.603	5.144	4.685	4.225	3.766	3.306	2.847	2.388	1.928	1.469	1.009
25/6/03	5.436	4.977	4.517	4.058	3.599	3.139	2.680	2.220	1.761	1.302	842
24/6/03	5.509	5.050	4.591	4.131	3.672	3.212	2.753	2.294	1.834	1.375	916
23/6/03	5.859	5.400	4.940	4.481	4.022	3.562	3.103	2.643	2.184	1.725	1.265
20/6/03	6.056	5.596	5.137	4.678	4.218	3.759	3.299	2.840	2.381	1.921	1.462
18/6/03	6.184	5.724	5.265	4.806	4.346	3.887	3.427	2.968	2.509	2.049	1.590
17/6/03	6.882	6.422	5.963	5.504	5.044	4.585	4.126	3.666	3.207	2.747	2.288
16/6/03	6.523	6.064	5.604	5.145	4.686	4.226	3.767	3.308	2.848	2.389	1.929
13/6/03	6.336	5.877	5.418	4.958	4.499	4.039	3.580	3.121	2.661	2.202	1.742
12/6/03	6.680	6.221	5.761	5.302	4.842	4.383	3.924	3.464	3.005	2.546	2.086
11/6/03	6.844	6.384	5.925	5.466	5.006	4.547	4.087	3.628	3.169	2.709	2.250
10/6/03	7.411	6.952	6.493	6.033	5.574	5.115	4.655	4.196	3.736	3.277	2.818
9/6/03	7.365	6.906	6.446	5.987	5.528	5.068	4.609	4.149	3.690	3.231	2.771
6/6/03	7.684	7.224	6.765	6.306	5.846	5.387	4.927	4.468	4.009	3.549	3.090
5/6/03	7.225	6.766	6.307	5.847	5.388	4.928	4.469	4.010	3.550	3.091	2.631
4/6/03	6.813	6.353	5.894	5.435	4.975	4.516	4.056	3.597	3.138	2.678	2.219
3/6/03	6.484	6.025	5.565	5.106	4.647	4.187	3.728	3.269	2.809	2.350	1.890
2/6/03	6.701	6.242	5.782	5.323	4.864	4.404	3.945	3.485	3.026	2.567	2.107
30/5/03	7.242	6.782	6.323	5.864	5.404	4.945	4.485	4.026	3.567	3.107	2.648
29/5/03	7.219	6.759	6.300	5.841	5.381	4.922	4.462	4.003	3.544	3.084	2.625
28/5/03	7.226	6.767	6.307	5.848	5.389	4.929	4.470	4.010	3.551	3.092	2.632
27/5/03	7.410	6.950	6.491	6.032	5.572	5.113	4.653	4.194	3.735	3.275	2.816
26/5/03	6.870	6.411	5.952	5.492	5.033	4.573	4.114	3.655	3.195	2.736	2.276
23/5/03	6.984	6.524	6.065	5.606	5.146	4.687	4.228	3.768	3.309	2.849	2.390
22/5/03	6.970	6.511	6.051	5.592	5.132	4.673	4.214	3.754	3.295	2.835	2.376
21/5/03	6.992	6.533	6.074	5.614	5.155	4.695	4.236	3.777	3.317	2.858	2.398
20/5/03	6.736	6.277	5.818	5.358	4.899	4.439	3.980	3.521	3.061	2.602	2.143
19/5/03	6.406	5.946	5.487	5.027	4.568	4.109	3.649	3.190	2.730	2.271	1.812
16/5/03	7.056	6.597	6.138	5.678	5.219	4.760	4.300	3.841	3.381	2.922	2.463
15/5/03	6.442	5.982	5.523	5.063	4.604	4.145	3.685	3.226	2.767	2.307	1.848
14/5/03	6.895	6.435	5.976	5.517	5.057	4.598	4.139	3.679	3.220	2.760	2.301
13/5/03	7.038	6.578	6.119	5.659	5.200	4.741	4.281	3.822	3.363	2.903	2.444
12/5/03	7.890	7.430	6.971	6.512	6.052	5.593	5.134	4.674	4.215	3.755	3.296
9/5/03	7.778	7.319	6.859	6.400	5.941	5.481	5.022	4.562	4.103	3.644	3.184
8/5/03	6.370	5.911	5.451	4.992	4.533	4.073	3.614	3.154	2.695	2.236	1.776
7/5/03	6.870	6.410	5.951	5.491	5.032	4.573	4.113	3.654	3.195	2.735	2.276
6/5/03	6.287	5.827	5.368	4.909	4.449	3.990	3.530	3.071	2.612	2.152	1.693
5/5/03	7.698	7.238	6.779	6.320	5.860	5.401	4.941	4.482	4.023	3.563	3.104
2/5/03	8.138	7.678	7.219	6.760	6.300	5.841	5.382	4.922	4.463	4.003	3.544
30/4/03	7.956	7.496	7.037	6.577	6.118	5.659	5.199	4.740	4.281	3.821	3.362
29/4/03	8.463	8.004	7.545	7.085	6.626	6.167	5.707	5.248	4.788	4.329	3.870
28/4/03	9.473	9.014	8.555	8.095	7.636	7.177	6.717	6.258	5.798	5.339	4.880
25/4/03	8.485	8.025	7.566	7.107	6.647	6.188	5.728	5.269	4.810	4.350	3.891
24/4/03	8.621	8.162	7.702	7.243	6.784	6.324	5.865	5.405	4.946	4.487	4.027
23/4/03	8.082	7.623	7.164	6.704	6.245	5.785	5.326	4.867	4.407	3.948	3.488
22/4/03	8.155	7.695	7.236	6.777	6.317	5.858	5.399	4.939	4.480	4.020	3.561
17/4/03	8.435	7.976	7.517	7.057	6.598	6.138	5.679	5.220	4.760	4.301	3.842
16/4/03	7.482	7.023	6.564	6.104	5.645	5.185	4.726	4.267	3.807	3.348	2.889
15/4/03	7.553	7.093	6.634	6.174	5.715	5.256	4.796	4.337	3.878	3.418	2.959
14/4/03	6.247	5.788	5.328	4.869	4.410	3.950	3.491	3.031	2.572	2.113	1.653

5.3.2.2 "Planilha de Cálculo"

Esta planilha é a aplicação do algorítimo para construção do modelo apresentado no ítem 5.3.1 para o cálculo da curva de volatilidade.

Esta planilha contém os dados inseridos pelo usuário na Planilha Principal e os cálculos para a obtenção da curva.

- Linha Preço de Exercício: possui os preços de exercícios inseridos pelo usuário na planilha principal.
- Linha Preço de Mercado: Possui o preço da opção *"at the Money"* calculada na planilha principal relativa à volatilidade *"at The Money"*.
- Campo Taxa Efetiva: Calcula a taxa efetiva até o vencimento da opção.
- Campo Lagrange : Multiplicador de Lagrange λ_1
- Campo Lagrange ATM: Mutiplicador de Lagrange λ_2
- Coluna A e B: Nestas colunas é onde a "Macro" Database insere os preços históricos do ativo
- Coluna C: Calcula o retorno R(-h)
- Coluna D: Calcula o R(-h) multiplicado pelo preço atual do ativo
- Coluna E: Calcula:

$$\frac{R(-h)}{r^T} - 1$$

- Coluna F: Calcula

$$\left(\lambda_1\left(\frac{R(-h)}{r^T} - 1\right)\right)$$

Sendo que λ_1 é o multplicador de Lagrange do campo Lagrange.

- Coluna H: Calcula

$$\lambda_2\left(\frac{Máx\left[S_o R(-h) - X_{ATM}, 0\right]}{r^T} - C_{ATM}\right)$$

λ_2 é o multiplicador de lagrange do campo lagrange ATM

- Coluna I: Calcula o exponencial da soma do resultado da coluna F e H.

$$Exp\left[\lambda_1\left(\frac{R(-h)}{r^T}-1\right)+\lambda_2\left(\frac{Máx\left[S_oR(-h)-X_{ATM},0\right]}{r^T}-C_{ATM}\right)\right]$$

- Coluna Opt1 à Coluna Opt11: Calcula o máximo entre o resultado obtido na coluna D e os preços de exercícios das opções de 1 à 11, dividido pela taxa efetiva do Campo Taxa Efetiva.

$$\left(\frac{Máx\left[S_oR(-h)-X_{ATM},0\right]}{r^T}\right)$$

- Coluna G: Calcula q, dividindo o resultado da Coluna I, pela somatória da Coluna I, que está Calculado no Campo Somatória.
- "Macro" Curva: A "Macro" Curva acionada na planilha Principal, faz com que o campo Somatória seja minimizado alterando os multiplicadores de langrange nos Campos Lagrange e Lagrange ATM.
- Linha Preço da opção: calcula o preço da opção encontrado após a utilização da "Macro" Curva. O preço da opção 1 é obtido pela somatória da coluna G (q (h)), multiplicado pela coluna Opt1, e assim sucessivamente até a Opt11

$$C_i=\sum_h\left(\frac{\max\left[S\cdot R(-h)-Xi,0\right]}{r^T}q_{ATM}(h)\right)$$

- Linha Volatilidade: Com os preços obtidos na Linha Preço da Opção, é utilizado a função BSVOL, para calcular a volatilidade implícita de cada preço de exercício, formando assim a curva de volatilidade.

6. Análise dos Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados dos testes realizados, comparando a curva de volatilidade observada no mercado de Índice Bovespa e a obtida pelo modelo.

6.1 Parâmetros dos testes.

As curvas observadas foram obtidas no período compreendido entre o dia 9 de julho de 2003, à 18 de julho de 2003, Foram analisadas as volatilidades dos onze preços de exercícios mais líquidos. O preço de exercício medido em pontos e a volatilidade em porcentagem.

A curva observada no mercado pode variar dependendo da liquidez do dia e do tempo para o vencimento das opções. Cumpre observar que as opções com vencimentos curtos (um a três meses) possuem a volatilidade mais sensível a pequenas mudanças no preço do ativo se comparadas as opções com vencimentos longos, podendo até mesmo causar distorções nos dados.

Os testes foram realizados em opções vencimento em 13 de agosto de 2003, pois nestas opções concentram-se o maior número de operações. Nos preços de exercício em que não houve realização de negócio no dia da observação, foi utilizado o preço intermediário entre o preço de venda e o preço de compra, já nos preços de exercícios que não haviam ofertas de compra ou de venda, foram utilizadas as mesmas volatilidades utilizada pelos negociadores do Banco JP Morgan para precificação das suas posições já existentes.

Os dados históricos utilizados para o cálculo da curva de volatilidade foram os preços do índice Bovespa de 16 de novembro de 2000, até a data dos testes. Os preços utilizados encontram-se listados em anexo.

Nos testes complementares, que serão apresentados no decorrer do capítulo, o modelo foi testado nos dias 16 de agosto de 2003 e 15 de outubro de 2003 para as opções com vencimento em 18 de fevereiro de 2003 e 14 de abril de 2004, respectivamente. Estes testes foram realizados para avaliar a aderência do modelo em opções com vencimentos mais longos, no caso avaliado, seis meses.

6.2 Apresentação dos resultados

Primeiramente foi observado a curva de volatilidade negociada nos oito consecutivos pregões durante o período mencionado no item anterior, conforme apresentado na tabela abaixo:

Tabela 7 – Curva de volatilidade do índice Bovespa, observada no mercado de 09/06/2003 à 18/06/2003 – Elaborado pelo autor

	CURVAS OBSERVADAS										
Data / Preço de Exercício	**11000**	**11500**	**12000**	**12500**	**13000**	**13500**	**14000**	**14500**	**15000**	**15500**	**16000**
18/jun/03	30,63%	29,84%	29,30%	28,92%	28,70%	28,51%	28,22%	27,69%	27,15%	26,92%	26,73%
17/jun/03	31,63%	31,12%	29,80%	29,20%	28,88%	28,55%	28,80%	28,12%	28,09%	26,89%	27,40%
16/jun/03	33,73%	32,11%	31,11%	29,70%	29,20%	28,43%	28,00%	27,54%	26,83%	25,91%	25,72%
13/jun/03	32,00%	31,13%	29,74%	28,11%	27,95%	28,58%	28,78%	28,13%	27,12%	25,81%	25,62%
12/jun/03	31,23%	30,84%	29,63%	29,25%	29,12%	28,47%	28,88%	27,91%	27,38%	25,94%	25,23%
11/jun/03	29,54%	29,67%	29,00%	28,40%	27,95%	28,41%	28,88%	28,13%	27,13%	27,36%	27,17%
10/jun/03	30,58%	29,12%	29,11%	28,90%	28,20%	28,60%	28,60%	28,01%	28,47%	27,88%	27,22%
9/jun/03	30,12%	29,13%	28,59%	28,40%	28,17%	28,50%	28,61%	27,88%	27,44%	27,12%	27,03%
Desvio Padrão	1,30%	1,09%	0,76%	0,53%	0,51%	0,07%	0,32%	0,52%	0,72%	0,85%	1,13%
Média	31,18%	30,37%	29,54%	28,86%	28,52%	28,51%	28,43%	27,93%	27,45%	26,73%	26,52%

Observa-se que o desvio padrão da curva observada aumenta conforme os preços de exercício das opções afastam-se do preço de exercício 13500, *“at the Money”*.

Este aumento no desvio padrão pode ser explicado pela diferença entre o preço de compra e de venda das opções com preço de exercício 11.000 e 16.000 ser maior do que os do preço de exercício 13.500 *"at the Money"*, além disso, o lucro ou prejuízo obtido pela variação de 1% na volatilidade para as opções mais *"in the money"* e *"out of the money"* é menor do que na opção com preço de exercício *"At the money"*.

Nos mesmos dias em que os dados observados foram colhidos e utilizando os mesmos parâmetros da curva observada, foi calculada a curva estimada utilizado o modelo. O resultado encontra-se na tabela 8 a seguir:

Tabela 8 – Curva de volatilidade do índice Bovespa obtida pelo modelo no período entre 09/06/2003 e 18/06/2003 – Elaborado pelo autor

	CURVAS ESTIMADAS										
Data / Preço de Exercício	**11000**	**11500**	**12000**	**12500**	**13000**	**13500**	**14000**	**14500**	**15000**	**15500**	**16000**
18/jun/03	31,22%	30,45%	29,0%	29,2%	28,13%	28,51%	28,14%	27,78%	27,55%	27,44%	27,64%
17/jun/03	32,88%	30,02%	29,5%	29,6%	28,13%	28,55%	28,55%	28,01%	27,88%	26,89%	26,44%
16/jun/03	31,15%	31,15%	29,8%	29,9%	29,34%	28,43%	27,78%	26,84%	27,33%	26,77%	26,89%
13/jun/03	30,99%	29,84%	28,9%	28,5%	28,01%	28,58%	28,13%	27,11%	28,14%	28,13%	26,13%
12/jun/03	31,84%	30,88%	28,1%	28,6%	29,02%	28,47%	28,75%	27,53%	27,13%	27,55%	26,84%
11/jun/03	30,15%	30,02%	28,9%	28,7%	28,13%	28,41%	28,38%	27,91%	27,48%	27,36%	26,56%
10/jun/03	30,58%	30,01%	29,2%	29,6%	28,69%	28,60%	28,12%	27,12%	28,02%	28,23%	27,13%
9/jun/03	31,17%	30,51%	29,5%	29,0%	28,13%	28,50%	28,01%	27,49%	28,53%	28,13%	28,81%
Desvio Padrão	0,82%	0,47%	0,51%	0,52%	0,50%	0,07%	0,31%	0,42%	0,47%	0,56%	0,84%
Média	31,25%	30,36%	29,10%	29,14%	28,45%	28,51%	28,23%	27,47%	27,76%	27,56%	27,06%

Pode-se observar que o desvio padrão das opções *"in the money"* e *"out of the money"* são maiores que o da *"at the money"*, porém na curva estimada, as diferenças entre os desvios padrões entre os preços de exercício, são menores que nos da curva observada. O maior desvio padrão nas extremidas, como na curva observada, pode ser explicado pela maior sensibilidade da volatilidade à mudanças do preço das opções.

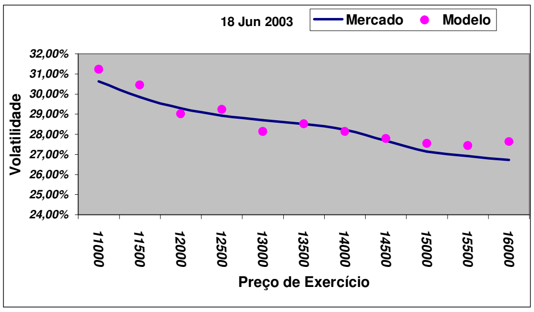
De forma a avaliar a validade da curva estima foi construída uma tabela comparativa entre as volatilidades observadas no mercado e as estimadas no modelo, calculando o erro absoluto médio para preço de exercício conforme a tabela 9.

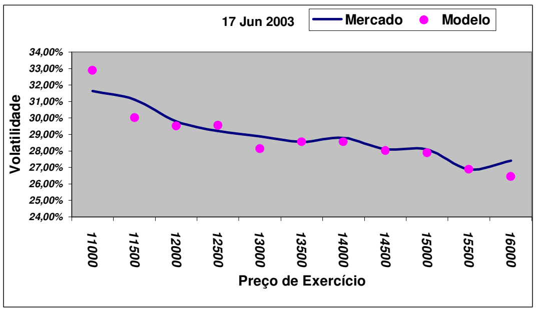
Tabela 9 – Comparação e cálculo do erro entre a curva obtida e a estimada. – Elaborado pelo autor

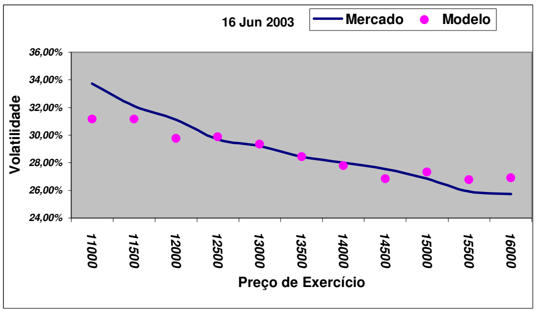
	Preço de Exercício Data	11000	11500	12000	12500	13000	13500	14000	14500	15000	15500	16000	Erro médio da Curva	Desvio Padrão
Observado	18-Jun-03	30.63%	29.84%	29.3%	28.9%	28.70%	28.51%	28.22%	27.69%	27.15%	26.92%	26.73%		
Estimado	18-Jun-03	31.22%	30.45%	29.0%	29.2%	28.13%	28.51%	28.14%	27.78%	27.55%	27.44%	27.64%		
Erro	18-Jun-03	0.59%	0.61%	0.28%	0.31%	0.57%	0.00%	0.08%	0.09%	0.40%	0.52%	0.91%	0.40%	0.28%
Observado	17-Jun-03	31.63%	31.12%	29.8%	29.2%	28.88%	28.55%	28.80%	28.12%	28.09%	26.89%	27.40%		
Estimado	17-Jun-03	32.88%	30.02%	29.5%	29.6%	28.13%	28.55%	28.55%	28.01%	27.88%	26.89%	26.44%		
Erro	17-Jun-03	1.25%	1.10%	0.29%	0.35%	0.75%	0.00%	0.25%	0.11%	0.21%	0.00%	0.96%	0.48%	0.45%
Observado	16-Jun-03	33.73%	32.11%	31.1%	29.7%	29.20%	28.43%	28.00%	27.54%	26.83%	25.91%	25.72%		
Estimado	16-Jun-03	31.15%	31.15%	29.8%	29.9%	29.34%	28.43%	27.78%	26.84%	27.33%	26.77%	26.89%		
Erro	16-Jun-03	2.58%	0.96%	1.36%	0.17%	0.14%	0.00%	0.22%	0.70%	0.50%	0.86%	1.17%	0.79%	0.75%
Observado	13-Jun-03	32.00%	31.13%	29.7%	28.1%	27.95%	28.58%	28.78%	28.13%	27.12%	25.81%	25.62%		
Estimado	13-Jun-03	30.99%	29.84%	28.9%	28.5%	28.01%	28.58%	28.13%	27.11%	28.14%	28.13%	26.13%		
Erro	13-Jun-03	1.01%	1.29%	0.86%	0.43%	0.06%	0.00%	0.65%	1.02%	1.02%	2.32%	0.51%	0.83%	0.64%
Observado	12-Jun-03	31.23%	30.84%	29.6%	29.3%	29.12%	28.47%	28.88%	27.91%	27.38%	25.94%	25.23%		
Estimado	12-Jun-03	31.84%	30.88%	28.1%	28.6%	29.02%	28.47%	28.75%	27.53%	27.13%	27.55%	26.84%		
Erro	12-Jun-03	0.61%	0.04%	1.50%	0.70%	0.10%	0.00%	0.13%	0.38%	0.25%	1.61%	1.61%	0.63%	0.65%
Observado	11-Jun-03	29.54%	29.67%	29.0%	28.4%	27.95%	28.41%	28.88%	28.13%	27.13%	27.36%	27.17%		
Estimado	11-Jun-03	30.15%	30.02%	28.9%	28.7%	28.13%	28.41%	28.38%	27.91%	27.48%	27.36%	26.56%		
Erro	11-Jun-03	0.61%	0.35%	0.12%	0.30%	0.18%	0.00%	0.50%	0.22%	0.35%	0.00%	0.61%	0.29%	0.22%
Observado	10-Jun-03	30.58%	29.12%	29.1%	28.9%	28.20%	28.60%	28.60%	28.01%	28.47%	27.88%	27.22%		
Estimado	10-Jun-03	30.58%	30.01%	29.2%	29.6%	28.69%	28.60%	28.12%	27.12%	28.02%	28.23%	27.13%		
Erro	10-Jun-03	0.00%	0.89%	0.04%	0.74%	0.49%	0.00%	0.48%	0.89%	0.45%	0.35%	0.09%	0.40%	0.34%
Observado	09-Jun-03	30.12%	29.13%	28.6%	28.4%	28.17%	28.50%	28.61%	27.88%	27.44%	27.12%	27.03%		
Estimado	09-Jun-03	31.17%	30.51%	29.5%	29.0%	28.13%	28.50%	28.01%	27.49%	28.53%	28.13%	28.81%		
Erro	09-Jun-03	1.05%	1.38%	0.92%	0.62%	0.04%	0.00%	0.60%	0.39%	1.09%	1.01%	1.78%	0.81%	0.54%
Erro Médio por Preço de Exercício		0.96%	0.83%	0.67%	0.45%	0.29%	0.00%	0.36%	0.48%	0.53%	0.83%	0.96%		
Desvio Padrão do erro		0.76%	0.46%	0.57%	0.21%	0.27%	0.00%	0.22%	0.35%	0.34%	0.81%	0.56%		
Curva Média Observada		31.18%	30.37%	29.54%	28.86%	28.52%	28.51%	28.60%	27.93%	27.45%	26.73%	26.52%		
Curva Média Estimada		31.25%	30.36%	29.10%	29.14%	28.45%	28.51%	28.23%	27.47%	27.76%	27.56%	27.06%		

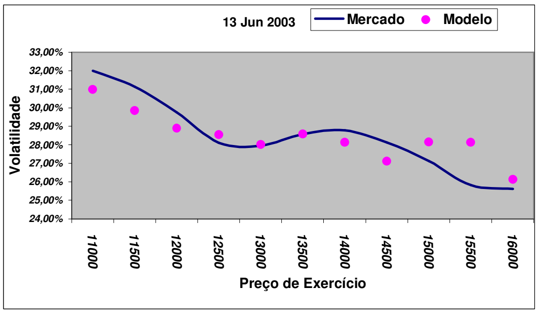
Como esperado, o erro médio do preço de exercício aumenta nas extremidades. Por o modelo ter como restrição possuir o preço da opção “at the money “ igual ao do mercado, o seu erro absoluto médio para este preço de exercício é muito pequeno, próximo de zero.

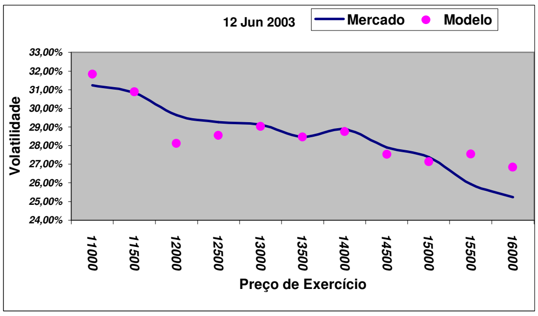
Os gráficos com a comparação da curva de volatilidade obtida com a estimada encontram-se na figura 15.

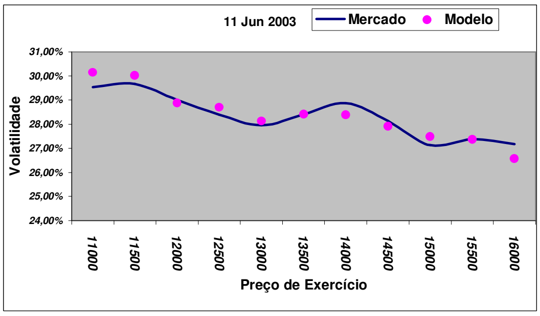

18 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
32,00% 31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício

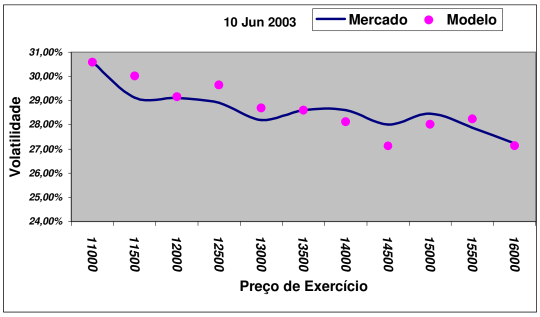

17 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
34,00% 33,00% 32,00% 31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício

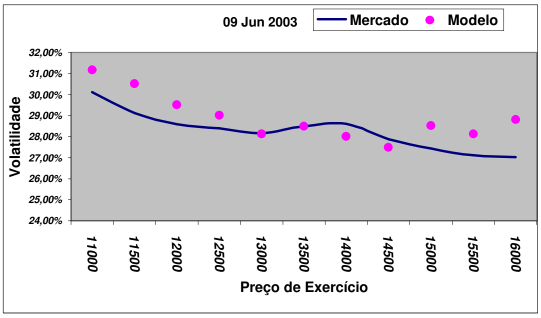

16 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
36,00% 34,00% 32,00% 30,00% 28,00% 26,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício


13 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
33,00% 32,00% 31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício


12 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
33,00% 32,00% 31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício


11 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício


10 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício


09 Jun 2003
Mercado
Modelo
Volatilidade
32,00% 31,00% 30,00% 29,00% 28,00% 27,00% 26,00% 25,00% 24,00%
11000 11500 12000 12500 13000 13500 14000 14500 15000 15500 16000
Preço de Exercício

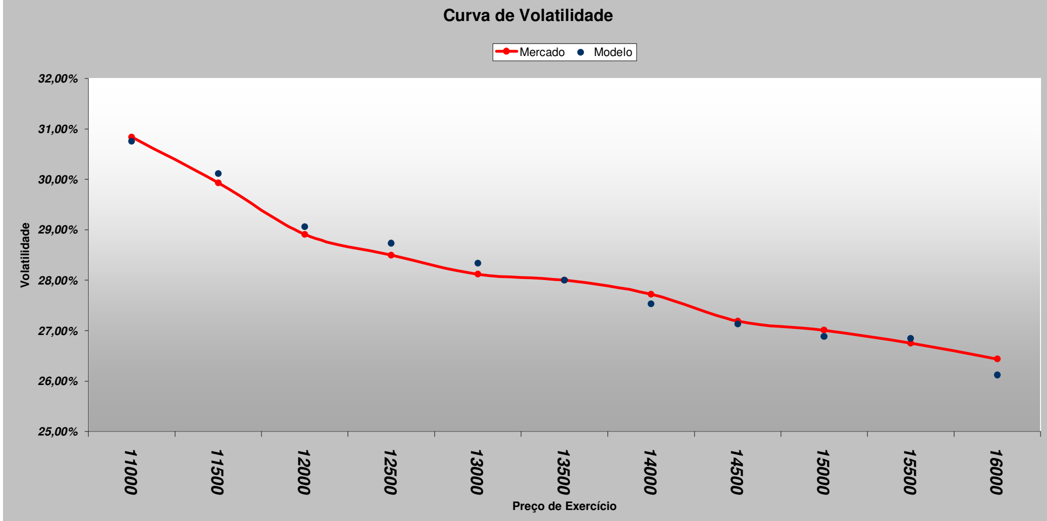
Após a análise das curvas obtidas para opções de dois meses, foram realizados testes complementares para verificar se o modelo obtém um resultado satisfatório para opções mais longas, para isso foi comparada a curva de volatilidade observada de seis meses, com a estimada.

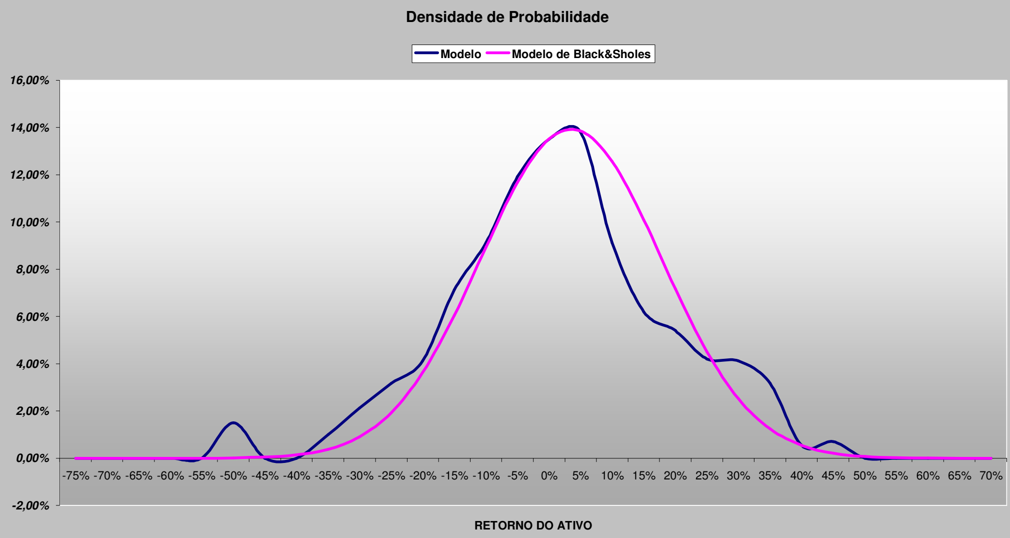
Foi observada a curva de volatilidade no dia 13 de agosto de 2003, para as opções com vencimento em 18 de fevereiro de 2004, e no dia 23 de outubro de 2003 para as opções com vencimento em 14 de abril de 2004.

No resultado mostrado nas figuras 16 e 17, foi também apresentado a distribuição de probabilidade q, obtida pelo modelo, comparando-a com a distribuição do modelo de Black&Sholes.

Data do Teste	13/ago/03		Preço do Atvio	13500		Erro Médio da Curva	0,15%
Vencimento da Opção	18/fev/04		Volatilidade ATM	28,00%		Desvio Padrão	0,09%

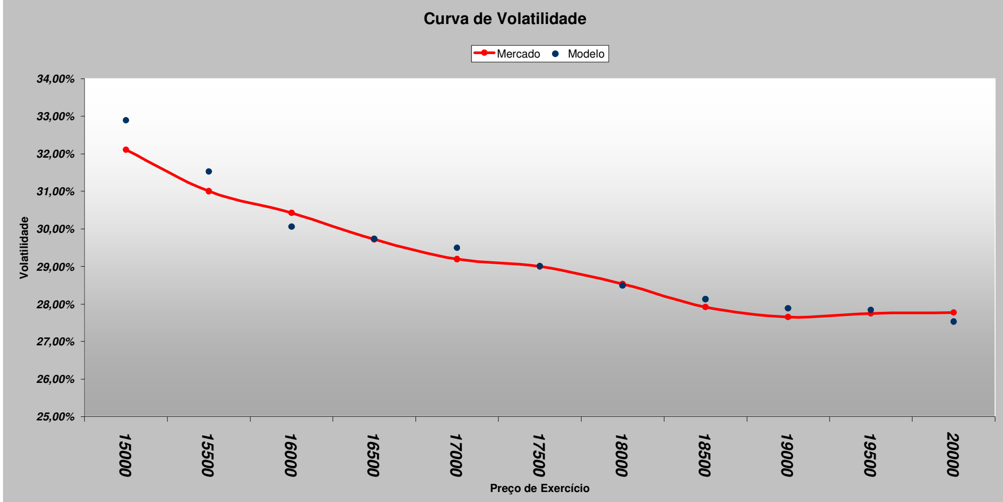
Preço de exercício	11000	11500	12000	12500	13000	13500	14000	14500	15000	15500	16000
Volatilidade Mercado	30,84%	29,93%	28,91%	28,50%	28,12%	28,00%	27,72%	27,19%	27,01%	26,75%	26,44%
Volatilidade do Modelo	30,75%	30,11%	29,06%	28,73%	28,34%	28,00%	27,53%	27,13%	26,89%	26,85%	26,12%
Erro	0,09%	0,18%	0,15%	0,23%	0,22%	0,00%	0,19%	0,06%	0,12%	0,10%	0,32%

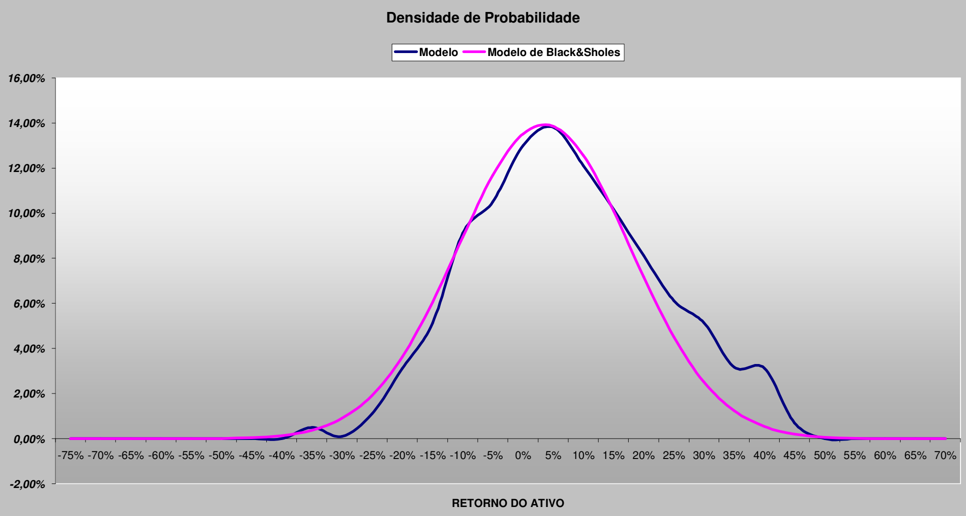




Data do Teste	23/out/03	Preço do Atvio	17500	Erro Médio da Curva	0,26%
Vencimento da Opção	14/abr/04	Volatilidade ATM	29,00%	Desvio Padrão	0,24%

Preço de exercício	15000	15500	16000	16500	17000	17500	18000	18500	19000	19500	20000
Volatilidade Mercado	32,11%	31,00%	30,43%	29,72%	29,20%	29,00%	28,53%	27,92%	27,65%	27,75%	27,77%
Volatilidade do Modelo	32,89%	31,53%	30,06%	29,73%	29,50%	29,01%	28,49%	28,13%	27,89%	27,85%	27,53%
Erro	0,78%	0,53%	0,37%	0,01%	0,30%	0,01%	0,04%	0,21%	0,23%	0,10%	0,24%





Pode-se observar pelos resultados que o erro médio e o desvio padrão é ainda menor que os obtidos nos teste das curvas para vencimento de dois meses, e a curva estimada para seis meses teve um erro absoluto médio menor do que a curva das opções com vencimento em dois meses. Sendo também considerado um resultado bastante satisfatório.

O teste do dia 23 de outubro, foi realizado um dia depois do índice Bovespa ter se desvalorizado 3.10%, após uma semana de pouca volatilidade. Este teste foi importante para verificar a consistência do modelo após mudanças bruscas nas condições de mercado.

Neste dia as volatilidades implícitas negociadas tiveram um aumento bastante considerável. As volatilidades do índice Bovespa *"at the Money"* que eram negociadas no dia anterior a 28,5%, passaram a ser negociadas a 30%. Observa-se pelos resultados que mesmo com a mudança brusca das condições do mercado o modelo continuou sendo um bom estimador da curva de mercado.

6.3 Análise dos Resultados

Analisando a comparação entre curva de volatilidade observada e a estimada, pode-se afirmar que a curva obtida pelo modelo é uma boa estimativa da curva de mercado, já que o erro absoluto médio é menor que o desvio padrão encontrado na curva observada.

Pelos testes complementares realizados em opções de seis meses, pode-se afirmar que o modelo também consegue obter uma boa estimativa da curva de volatilidade do mercado, já que os erro médio entre o valor observado e o estimado é muito baixo.

As distribuições de probabilidade $q_{ATM}(h)$ encontradas, como apresentado nas figuras 17 e 18, possuem sua média igual à distribuição normal de Black&Sholes, sendo coerente com a restrição imposta pelo modelo, apresentado no capítulo 5.

Outro importante ponto observado nos testes é o seu tempo para a obtenção do resultado. No início do trabalho, em entrevista com os negociadores, foi verificado que o tempo o qual tornaria o modelo viável para a precificação de operações estruturadas seria em torno de 900s, ou 15min.

O tempo médio observado para a obtenção dos resultados foi de 183s com desvio padrão de 27s.

Analisando os resultados obtidos, pode-se afirmar que a curva estimada pelo modelo é uma boa aproximação da curva de mercado observada.

7. Conclusão

Este capítulo é o fechamento do trabalho, nele é apresentada a conclusão final, a validação do modelo e sugestões para melhorias.

7.1 Conclusão

O objetivo do trabalho de formatura, é a solução de um problema ou a apresentação de uma melhoria na empresa em que o estágio supervisionado é realizado. No caso deste trabalho, o Banco JP Morgan.

Após experiência adquirida nos três anos de trabalho na instituição, além da observação das necessidades da área, complementada com entrevista aberta e discussões com os negociadores de volatilidade, foi proposto o objetivo deste trabalho, que é determinar a curva de volatilidade de ativos que não possuem opções sendo negociadas.

Para o desenvolvimento do estudo, faz-se necessário o entendimento dos fundamentos teóricos que envolvem o mercado de opções, para isto foi apresentado os conceitos de opção, e os problemas existentes no modelo de Black&Sholes, utilizado na sua precificação.

O problema do modelo de Black&Sholes, como apresentado, é a utilização da distribuição de probabilidade dos retornos do ativo como sendo normal, o que não condiz com a realidade, pois cada ativo possui uma distribuição de probabilidade de retorno própria.

Sedimentado o conceito de opção, e a problemática envolvida na sua precificação usual, foi apresentado o parâmetro volatilidade, sua forma de cálculo, e os tipos de curvas observados no mercado, finalizando assim o embasamento teórico para o entendimento do problema e elaboração da solução.

Para a escolha do modelo para solucionar o problema foram analisados modelos paramétricos e não paramétricos, sendo constatado que somente os modelos não paramétricos satisfazem a restrição de determinar a curva de volatilidade sem utilização dos preços de mercado. Dentre os modelos estudados, o mais eficiênte para solucionar o problema proposto é o Modelo Canônico de Máxima Entropia. Neste modelo, é utilizada a própria distribuição de probabilidade histórica do ativo e a sua volatilidade *"at the money"* para obtenção da solução.

Escolhido o modelo, foi pesquisado e apresentado o conceito de entropia relativa utilizada na sua construção. Após embasemento teórico, este foi desenvolvido, utilizando ferramentas que o tornasse de fácil utilização, além de facilitar a rápida obtenção dos resultados.

O modelo construído foi testado comparando a curva de volatilidade observada no mercado do índice Bovespa e a estimada pelo modelo. Os resultados obtidos nos teste realizados para opções com vencimento em dois e seis meses foram bastante satisfatórios, a curva de volatilidade estimada para o índice Bovespa é muito próxima da curva observada no mercado, o erro absoluto médio por preço de exercício é menor que o desvio padrão da curva observada.

Por a curva observada no mercado ser considerada pelos negociadores como a curva real do ativo, o modelo pode ser utilizado para obter a curva de volatilidade de ativos que não possuem opções sendo negociadas, utilizando para isso somente os seus preços históricos, sem a necessidade de usos de preços de mercado, cumprindo assim o objetivo do trabalho.

Outra importante conquista do trabalho foi conseguir construir o modelo utilizando ferramentas que tornassem mais rápida a obtenção da solução, o que, caso não ocorresse , inviabilizaria a sua utilização.

7.2 Validação e Próximos Passos.

Os negociadores da mesa de renda variável do Banco JP Morgan, colaboraram e acompanharam o desenvolvimento deste trabalho, e sua grande aceitação culminou com o sucesso dos testes e da construção do modelo. As constantes discussões abordando assuntos correlatos ao trabalho desde seu início, bem como a inclusão de diversas propostas consideradas por mim relevantes à confecção deste Trabalho de Formatura gerou uma grande participação de pessoas de expressiva experiência no mercado financeiro, o que, sem dúvida, contribuiu muito para que o projeto fosse bem sucedido e bem aceito dentro do Banco.

Depois de finalizado o corpo do trabalho e a realização dos testes, o mesmo foi analisado pelos negociadores que demonstraram interesse em sua utilização. A aprovação foi unânime, sendo que, os negociadores de volatilidade da área de *Equity Derivatives* demostraram interesse em passar o modelo de planilha para um sistema, para a sua utilização na precificação das opções sobre ativos que não possuem opções negociadas, e para a avaliação das curvas presentes no mercado.

Entretanto, o projeto não tem seu fim atrelado ao termino deste Trabalho, este pode ser refinado em diversos pontos, entre eles a utilização de *Back Test* para verificar o retorno obtido pela utilização da curva de volatilidade do modelo, e outros testes para que melhorias sejam feitas e conclusões futuras sejam apuradas.

Por fim, é importante lembrar a contribuição do curso de Engenharia de Produção na confecção deste projeto. Além de toda base teórica adquirida nas matérias de Economia, Finanças, Estatística, Tecnologia de Informação e Pesquisa Operacional, sem o qual seria muito difícil meu aprofundamento em um tema árido como o da obtenção da curva de volatilidade, o bom senso, o raciocínio lógico, a metodologia e a capacidade de desenvolvimento de modelos adquiridos durante esses cinco anos de curso foram o ponto chave para que esse projeto fosse bem sucedido. Desde a identificação do problema até a proposição e avaliação das soluções, senti a forte influência da Poli em meus métodos de raciocínio. Além disso a capacidade de desbravar temas que parecem hostis à primeira vista foi, sem dúvida, um ponto no qual esse curso e particularmente a Escola Politécnica me auxiliaram muito.

8. Bibliografia

BARÃO M., *Entropia, Entropia Relativa e Informação Mútua* – Universidade de Évora, 2003.

BAHRA, B., "*Implied risk neutral probability density functions from option prices: theory and applications*". Bank of England, 1997.

CORADI, C.D.*,* *Introdução aos Derivativos*. São Paulo: BM&F, 1996

COSTA, C. L., *Operando a Volatilidade*. São Paulo: BM&F, 1998

GULKO, B.L. *"The Entropy Theory of Stock Option Pricing"*, International Jpurnal of Theoretical and applied Finance, Vol. 2, N^{o} 3 – 331-335

HULL, J.*,* *Introduction to futures and options market.New Jersey*: Prentice Hall,1993

KULLBACK, S., *Informaion Theory and Statistics, New York*, Dover Publications. Inc., 1967

MARQUES, R. P., *Método de Avaliação de Freqüência de Decisão do Delta Hedge para Carteira de Opções*.- Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2000

MENDES, B.. e DUARTE, A., *Modelos Estatísticos Aplicados ao Mercado Financeiro Brasileiro*, 13 Sinape, Associação Brasileira de Estatística, 1998

NATENBERG S., *Options Volatility&Pricing* – McGraw –Hill, 1999

OLIVEIRA G., *Informação Implícita me Prêmios de Opções* – Dissertação de Mestrado – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, 2000.

SIQUEIRA, J. de O.*,"Determinação entrópica do preço racional da opção européia simples ordinária sobre ação e bond* "– tese de doutorado – Faculdade de Economia e Administração da USP

SMITH, D.H., *Some Observations on the Concepts of Information Theoretic Entropy and Randomness*, pág 2- pág 10, 2001

STUTZER, M., *A Simple Nomparametric Approach to Derivative Security Valuation*, J, of Finance, 51.pp. 1633-1652, 1996.

STUTZER, M.,. *A simple Non-Parametric Approach to Bond Futures and Options Pricing*, 1999.

ZOU, J.Z., *Strike Adjusted Spread: A New Metric For Estimating The Value Of Equity Options*,: Goldman Sachs, 1999

ZOU, J.Z., *Valuing Options and Baskets of Stocks and Forecasting the Shape of Volatility Skews*: Goldman Sachs, 2000

Anexo 1 – Função BS

```
Function BS(k As String, S As Double, x As Double, T As Double, R As
Double, V As Double)

    Dim A As Double
    Dim D As Double
    Dim D2 As Double

   On Error GoTo Trata_Erro

   T = T / 252
   R = Application.Ln(1 + R)
   D = (Application.Ln(S/x) + (R-(V^2)/2)*T)/(V*(T^0.5))
   D2 = D - V * ((T) ^ 0.5)

    If (UCase(k) = "C") Then

  A = S * Application.NormDist(D, 0, 1, True) - x * Exp(-R * T) *
Application.NormDist(D2, 0, 1, True)


    ElseIf UCase(k) = "P" Then

  A = x * Exp(-R * T) * Application.NormDist(-D2, 0, 1, True) - S *
Application.NormDist(-D, 0, 1, True)

  End If

  BS = A
  Exit Function

Trata_Erro:
   BS = Error(Err)

End Function
```

Anexo 2 – Função BSVol

```
Function BSvol(k As String, S As Double, x As Double, T As Double, R
As Double, P As Double)

    Dim A As Double

    Dim D As Double
    Dim D2 As Double
    Dim Vol as Double


On Error GoTo Trata_Erro

Vol= 0
Do
    Vol= Vol + 0.0001
    T = T / 252
    R = Application.Ln(1 + R)
    D = (Application.Ln(S / x) + (R - (Vol ^ 2) / 2) * T) / (Vol*(T^
0.5))
    D2 = D - V * ((T) ^ 0.5)

    If (UCase(k) = "C") Then
      A = S * Application.NormDist(D, 0, 1, True) - x * Exp(-R * T)
      * Application.NormDist(D2, 0, 1, True)


      ElseIf UCase(k) = "P" Then

      A = x * Exp(-R * T) * Application.NormDist(-D2, 0, 1, True) -
      S * Application.NormDist(-D, 0, 1, True)

    End If
Loop Until A=P

BSvol = A
Exit Function

Trata_Erro:
BSVol = Error(Err)

End Function
```

Anexo 3 – Macro Data Base

```
Sub Chama_Database()

      dim wData as worksheet
      dim wMain as worksheet
      dim info as variant
      dim dUlt as double

      set wData = Thisworkbook.sheets("Database")
      set wMain = Thisworkbook.sheets("Principal")

'     Procura o ativo na database
        vInfo = Application.Match(wMain.range("Ativo").Value,
wData.Range("Base"), 0)
      if not iserror(info) then
'           Transfere as datas
              dUlt = wData.Cells(65536, vInfo).End(xlUp).Row
                  wData.Range(wData.Cells(3, C_DAT),
wData.Cells(dUlt, C_DAT)).Copy
                  wMain.Cells(15, C_DAT).PasteSpecial xlPasteValues

'           Transfere os dados
              wData.Range(wData.Cells(3, vInfo), wData.Cells(dUlt -
1, vInfo)).Copy
            wMain.Cells(15, 2).PasteSpecial xlPasteValues

'           Copia as formulas
              wMain.Range("C15:U" & dUlt + 12).Copy
            wMain.Cells(8, 2).PasteSpecial xlPasteFormulas

      Else
            Msgbox "Ativo não encontrado!"
      End if
End Sub
```